MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**30 de Agosto, 1999**

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi, A. Moreira *Prof. Auxiliar: J. Barrera, E. Moreno, M. Saez*

TIEMPO: 3 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- En un pueblito en el que nadie es indeciso, una encuesta registra los porcentajes de apoyo $(7, 7, 36, 7, 36, 7)$ para los candidatos Frei, Hirsch, Lagos, Larraín, Lavín, y Marín, respectivamente. Paseando por las calles del pueblo nos encontramos con un entusiasta adherente de una de las candidaturas, que lleva bajo el brazo un pliego con el nombre de su candidato. Lo lleva doblado, y todo lo que alcanzamos a ver en él es la letra "a". Verifique que la probabilidad de que se trate de un adherente de Lagos es $36/89$.

(ii).- De un grupo de 4 argentinos, 4 brasileños, y 4 chilenos se escogen al azar 4 personas. Verifique que la probabilidad de que al menos una nacionalidad esté ausente es $23/55$. (Indicación: Use el principio de inclusión–exclusión.)

PROBLEMA 2:

(i).- Se dice que E y F son independientes si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(F)$. Se dice que E acarrea información negativa (respectivamente positiva) acerca de F si $\mathbb{P}(E) \neq 0$ y $\mathbb{P}(F/E) < \mathbb{P}(F)$ (respectivamente $\mathbb{P}(F/E) > \mathbb{P}(F)$).

Para el experimento que consiste en determinar el cumpleaños de dos personas elegidas al azar proporcione ejemplos de eventos tales que

(i.1).- E es independiente de F.

(i.2).- E acarrea información negativa acerca de F.

(i.3).- E acarrea información positiva acerca de F.

Especifique claramente los supuestos que haga, el espacio muestral y la medida de probabilidad con la que va a trabajar.

(ii).- Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de eventos.

(ii.1).- Pruebe que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) < \infty$, entonces $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} C_n\right) = 0$.

Indicación: Utilice la desigualdad de Boole.

(ii.2).- Se define $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n$. Utilice la propiedad de continuidad de $\mathbb{P}$ para probar el Lema de Borell–Cantelli, i.e., que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) < \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} C_n\right) = 0\,.$$

PROBLEMA 3: Un largo seguimiento de un paciente con una extraña e indeterminada dolencia indica que de los últimos 16 meses éste ha tenido molestias en 5 ocasiones, como muestra la siguiente tabla (las B indican bienestar y las A indican anomalías):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	A	B	B	A	B	B	B	A	B	B	B	A	B	A	B

Observe que no hay dos meses consecutivos en que el paciente tenga molestias. Nos interesa determinar si esto puede deberse al azar.

En cualquier arreglo de elementos de dos tipos (como A's y B's), cada sub-arreglo maximal de elementos del mismo tipo se llama una *corrida*. Por ejemplo, la secuencia de la tabla anterior comienza con una corrida de B's de largo 1, sigue con una corrida de A's de largo 1, y luego una de B's de largo 2, en total, consta de 6 corridas de B's y 5 de A's.

Sean a, b, n, y m enteros positivos tales que $a-1 \leq b$, $n \in \{1, \ldots, a\}$, y $m \in \{1, \ldots, b\}$.

(i).- (1.0 pts) En un arreglo en que el número de A's y B's es a y b respectivamente, ¿cuántas corridas de A's pueden haber? Si el número de corridas de B's es m, ¿cuántas corridas de A's pueden haber?

(ii).- (1.5 pts) Pruebe que hay $\binom{a+b}{a}$ arreglos en que el número de A's y B's es a y b respectivamente.

(iii).- (1.0 pts) Pruebe que hay $\binom{a-1}{n-1}$ formas de ordenar a letras A en n corridas (por ejemplo, hay 3 formas de ordenar 4 letras A en 3 corridas; (AA, A, A), (A, AA, A), y (A, A, AA)).

(iv).- (1.5 pts) Suponga que $m = n \pm 1$. Si todos los arreglos de a letras A's y b letras B's son igualmente probables ¿Cuál es la probabilidad de obtener n corridas de A's y m corridas de B's?

<u>Nota</u>: Indique claramente el espacio muestral y la medida de probabilidad con la que va a trabajar.

(v).- (1.0 pts) Observe que en la tabla de más arriba el número de corridas de A's es 5 y el de B's es 6, i.e., el máximo de corridas que se pueden obtener con 5 letras A's y 11 letras B's. Indique informalmente (en palabras) que es lo que le sugiere un número tan elevado de corridas de A's.

Si el número de corridas de A'a y B's hubiese sido 1 y 2 respectivamente ¿qué concluiría?

SIN CONSULTAS.