MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **1 de Diciembre, 1999**

Aproximaciones entre Distribuciones

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: E. Moreno, M. Saez*

Lema 1 [**Aproximación Binomial de la Hipergeométrica**] *Sea $0 < p < 1$ y sea n un número entero positivo. Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, entonces*

$$\frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \to \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{cuando } N \to \infty\,.$$

es decir, la probabilidad que una $\mathrm{Hiper}(n, Np, N(1-p))$ *sea igual a k converge a la probabilidad que una* $\mathrm{Binomial}(n,p)$ *sea igual a k, cuando $N \to \infty$.*

Lema 2 [**Aproximación de Poisson a la Binomial**] *Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tales que np_n converge a λ cuando $n \to \infty$. Si $k \in \{0, \ldots, n\}$, entonces*

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \quad \to \quad e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

En particular, la probabilidad que una $\mathrm{Binomial}(n, \lambda/n)$ *sea igual a k converge a la probabilidad que una* $\mathrm{Poisson}(\lambda)$ *sea igual a k. En este último caso, por lo general, la aproximación es bastante buena si $n \geq 20$ y $\lambda/n \leq 0.05$ o $n \geq 100$ y $\lambda/n \leq 0.10$.*

Teorema 1 [**Teorema DeMoivre–Laplace**] *Si X_n se distribuye como una* $\mathrm{Binomial}(n,p)$*, entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\}\right) \quad \to \quad \Phi(b) - \Phi(a)\,, \quad \text{cuando } n \to \infty\,,$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la función distribución de la $\mathrm{Normal}(0,1)$*. El limite es, por lo general, una bastante buena aproximación si $np(1-p) \geq 10$.*

La siguiente desigualdad da una estimación del error que se comete al utilizar aproximaciones basadas en el Teorema Central del Limite.

Lema 3 [**Desigualdad de Berry–Esseen**] *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que $\mathbb{E}(X_j) = 0$, $\mathbb{E}\left(X_j^2\right) = \sigma^2 > 0$, y $\mathbb{E}\left(|X_j|^3\right) < \infty$. Se tiene que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} X_j \leq x\right\}\right) - \Phi(x) \right| \quad \leq \quad \frac{C}{\sigma^3\sqrt{n}}\,\mathbb{E}\left(|X_j|^3\right)\,,$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la función distribución de la $\mathrm{Normal}(0,1)$ *y C es una constante ($C < 33/4$).*