MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**28 de Mayo**

Resumen No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

1 Variables Aleatorias Absolutamente Continuas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 1 [**Variable Aleatoria Absolutamente Continua**] *Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $C \subseteq \mathbb{R}$ para el cual $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(\{X \in C\}) = \int_C f_X(x)dx\,.$$

A la función f_X se le denomina función densidad de la variable aleatoria X.

Proposición 1 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, se tiene que*

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ *y* $\mathbb{P}(\{X = t\}) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
2. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$ *y si f_X es continua en t, entonces* $f_X(t) = \frac{d}{dt}F_X(t)$.

Proposición 2 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Sean $D, R \subseteq \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R} \setminus f_X^{-1}(\{0\}) \subseteq D$ y $g\colon D \to R$ tal que $Y = g(X)$ es variable aleatoria (en particular esto ocurre cuando g es continua). Sigue que*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(\left\{X \in g^{-1}(]-\infty, t])\right\}\right)\,.$$

Si además g es biyectiva y diferenciable, entonces Y es absolutamente continua y

$$f_Y(t) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(t))\left|\frac{d}{dt}g^{-1}(t)\right| & \text{si } t \in R, \\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Modelos absolutamente continuos: A continuación se da la fórmula de la función densidad f_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X absolutamente continuas.

UNIFORME: X es una uniforme de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, denotado $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

EXPONENCIAL: X es una exponencial de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, denotado $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario}. \end{cases}$$

NORMAL: X es una normal de parámetros $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

GAMA: X es una gama de parámetros $\lambda, p \in \mathbb{R}$, $\lambda, p > 0$, denotado $X \sim \text{Gama}(p, \lambda)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(p)} \lambda (\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en caso contrario}, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

CAUCHY: X es una Cauchy de parámetro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2\right)}, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

BETA: X es una beta de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, denotado $X \sim \text{Beta}(a, b)$, si

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{en caso contrario}, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Proposición 3 *Si* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ *y* Φ *denota la función distribución de una* $\text{Normal}(0, 1)$, *entonces*

1. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ *cualquiera sea* $t \in \mathbb{R}$,
2. *si* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *entonces* $aX + b \sim \text{Normal}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$, *en particular* $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$.

2 Distribución Conjunta de Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 2 [**Función Distribución Conjunta**] *A $F_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se le llama función distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ si para todo $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,*

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\{X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n\}\right) .$$

Proposición 4 *Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $t_i \in \mathbb{R}$,*

$$F_{X_i}(t_i) \quad = \quad \lim_{t_1 \to \infty} \cdots \lim_{t_{i-1} \to \infty} \lim_{t_{i+1} \to \infty} \cdots \lim_{t_n \to \infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) .$$

Definición 3 [**Funciones Distribución Marginales**] *A las funciones distribución $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ también se les denomina funciones distribución marginales de $F_{X_1,\ldots,X_n}$.*

Proposición 5 *Si F es la función distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, entonces*

1. *F es no–decreciente en cada una de sus coordenadas,*
2. *$\lim_{t_1 \to \infty} \cdots \lim_{t_n \to \infty} F(t_1, \ldots, t_n) = 1$, y para todo $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \lim_{t_i \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_n) \quad &= \quad 0 \\ \lim_{t_i \to \infty} F(t_1, \ldots, t_n) \quad &= \quad F_{X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n) . \end{aligned}$$

Definición 4 [**Variables Aleatorias Conjuntamente Discretas**] *Se dice que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias conjuntamente discretas si toman a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si $S_{X_1,\ldots,X_n} = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}\left(\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\}\right) > 0\}$ es numerable y $\mathbb{P}\left(S_{X_1,\ldots,X_n}\right) = 1$. Al conjunto $S_{X_1,\ldots,X_n}$ se le denomina soporte del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ y a la función $p_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbb{P}\left(\{X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n\}\right)$ se le denomina función densidad de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$.*

Proposición 6 *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias conjuntamente discretas, se tiene que*

1. *$\displaystyle\sum_{\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n}} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ y si $\vec{a} \notin S_{X_1,\ldots,X_n}$ entonces $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0$.*
2. *$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \displaystyle\sum_{\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n} : a_1 \le t_1, \ldots, a_n \le t_n} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n)$.*
3. *$p_{X_i}(t_i) = \displaystyle\sum_{\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n} : a_i = t_i} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n)$.*

Definición 5 [**Funciones Densidad de Probabilidad Marginales**] *A las funciones densidad de probabilidad* $p_{X_1}, \ldots, p_{X_n}$ *también se les denomina funciones densidad de probabilidad marginales de* $p_{X_1,\ldots,X_n}$.

Definición 6 [**Variables Aleatorias Conjuntamente Continuas**] *Se dice que* $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias conjuntamente continuas si existe una función* $f_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *para el cual* $\{(X_1, \ldots, X_n) \in C\} \in \mathcal{F}$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\{(X_1, \ldots, X_n) \in C\}\right) = \int \cdots \int_C f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \, .$$

A la función $f_{X_1,\ldots,X_n}$ *se le denomina función densidad conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$.

Proposición 7 *Sean* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatorias conjuntamente continuas, se tiene que*

1. $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$.

2. $\displaystyle F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ *y si* $f_{X_1,\ldots,X_n}$ *es continua en* $(t_1, \ldots, t_n)$*, entonces* $\displaystyle f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n)$.

3. $\displaystyle f_{X_i}(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$.

Definición 7 [**Funciones Densidad Marginales**] *A las funciones densidad de probabilidad* $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ *también se les denomina funciones densidad marginales de* $f_{X_1,\ldots,X_n}$.

Definición 8 [**Variables Aleatorias Independientes**] *Se dice que* $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias independientes si para todo* $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $\{X_1 \in A_1\}, \ldots, \{X_n \in A_n\} \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_i \in A_i\}\right) \, .$$

Una colección infinita de variables aleatorias se dice independiente si cualquier subcolección finita de ellas es independiente.

Lema 1 $X_1, \ldots, X_n$ *son independientes sí y sólo si* $\displaystyle F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$.

Corolario 1 $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias independientes sí y sólo si*

- $\displaystyle p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(a_i)$ *para todo* $\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n}$ *en el caso que* $X_1, \ldots, X_n$ *sean conjuntamente discretas.*

- $f_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)$ *para todo* $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ *en el caso que* $X_1,\dots,X_n$ *sean conjuntamente continuas.*

Lema 2 *Sea* $I \subseteq \mathbb{N}$*. Si* $\{X_i\}_{i\in I}$ *es una colección de variables aleatorias independientes y para todo* $i \in I$ *la función* $g_i\colon D_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\mathbb{P}(\{X_i \in D_i\}) = 1$ *e* $Y_i = g_i(X_i)$ *es variable aleatoria, entonces* $\{Y_i\}_{i\in I}$ *es una colección de variables aleatorias independientes.*

Lema 3 [**Suma de Variables Aleatorias Independientes**] *Si* X_1 *e* X_2 *son variables aleatorias independientes, entonces*

- $p_{X_1+X_2}(c) = \sum_{a\in S_{X_1}} p_{X_1}(a)p_{X_2}(c-a) = \sum_{b\in S_{X_2}} p_{X_1}(c-b)p_{X_2}(b)$ *en el caso que* X_1 *y* X_2 *sean conjuntamente discretas,*
- $f_{X_1+X_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x)f_{X_2}(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t-x)f_{X_2}(x)dx$ *en el caso que* X_1 *y* X_2 *sean conjuntamente continuas.*

Lema 4 *Si* $X_1,\dots,X_n$ *son variables aleatorias independientes tales que* $X_i \sim \mathrm{Normal}(\mu_i,\sigma_i^2)$*, entonces* $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Normal}(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$*, y si además* $X_1,\dots,X_n$ *son idénticamente distribuidas de acuerdo a una* $\mathrm{Normal}(\mu,\sigma^2)$*, entonces* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Lema 5 [**Método del Jacobiano**] *Sean* $X_1,\dots,X_n$ *variables aleatorias conjuntamente continuas. Sean* $D, R \subseteq \mathbb{R}^n$ *tales que* $\mathbb{R}^n \setminus f_X^{-1}(\{0\}) \subseteq D$ *y* $\vec{g} = (g_1,\dots,g_n)\colon D \to R$ *tal que para todo* $i \in \{1,\dots,n\}$ *se tiene que* $Y_i = g_i(X_1,\dots,X_n)$ *es variable aleatoria (en particular esto ocurre cuando* g_i *es continua). Si además*

1. $\vec{g}$ *es biyección, i.e., para todo* $(y_1,\dots,y_n) \in R$*, el sistema de ecuaciones* $y_i = g_i(x_1,\dots,x_n)$*,* $i \in \{1,\dots,n\}$*, tiene solución única* $x_i = h_i(y_1,\dots,y_n)$*.*
2. *las funciones* $g_1,\dots,g_n$ *son tales que todas sus derivadas parciales son continuas y que el Jacobiano de* $\vec{g}$ *es no nulo para todo* $(x_1,\dots,x_n) \in D$*, i.e.,*

$$(x_1,\dots,x_n) \in D \qquad \Longrightarrow \qquad J(x_1,\dots,x_n) \stackrel{\text{def}}{=} det \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{(x_1,\dots,x_n)} \neq 0\,.$$

Entonces, se tiene que $Y_1, \ldots, Y_n$ *son variables aleatorias conjuntamente continuas y*

$$\begin{aligned} f_{Y_1,\ldots,Y_n}(\vec{y}) &= \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(\vec{g}^{-1}(\vec{y})) \left|J(\vec{g}^{-1}(\vec{y}))\right|^{-1} & si\ \vec{y} \in R, \\ 0 & en\ caso\ contrario. \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(\vec{h}(\vec{y})) \left|J(\vec{h}(\vec{y}))\right|^{-1} & si\ \vec{y} \in R, \\ 0 & en\ caso\ contrario. \end{cases} \end{aligned}$$