MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **29 de Abril**

Resumen No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

1 Probabilidades Condicionales

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Convención 1 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos denotamos su intersección $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ por $A_1 A_2 \cdots A_n$.*

Definición 1 [**Probabilidad Condicional**] *Sean $E, F \in \mathcal{F}$ dos eventos tales que $\mathbb{P}(F) > 0$ se define la probabilidad de E dado F, denotado $\mathbb{P}(E/F)$, por $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(EF)/\mathbb{P}(F)$.*

Proposición 1 *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_n/A_1 \cdots A_{n-1})\,\mathbb{P}(A_{n-1}/A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2/A_1)\,\mathbb{P}(A_1)\ .$$

Proposición 2 *Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(F) > 0$ sigue que $\mathbb{P}(\cdot/F) : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que a E le asocia $\mathbb{P}(E/F)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definición 2 [$\mathbb{P}$-**partición**] *Sea I un conjunto de índices, se dice que $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ es una $\mathbb{P}$-partición si $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\mathbb{P}(\cup_{i\in I} A_i) = 1$, y para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$ se tiene que $\mathbb{P}(A_i A_j) = 0$.*

Proposición 3 *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de Ω entonces también es una $\mathbb{P}$-partición.*

Lema 1 [**Regla de Probabilidades Totales**] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una $\mathbb{P}$-partición. Sigue que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(AA_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A/A_i)\,\mathbb{P}(A_i)\ .$$

Teorema 1 [**Teorema de Bayes**] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una $\mathbb{P}$-partición. Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ se tiene que*

$$\forall j \in I\,, \qquad \mathbb{P}(A_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A/A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}\,.$$

Definición 3 [**Independencia**] *Se dice que $A, B \in \mathcal{F}$ son eventos independientes si $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. En general, se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos independientes si para todo $n > 0$ y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\ .$$

Lema 2 *Si $A, B \in \mathcal{F}$ son eventos independientes entonces B y A, A y B^c, A^c y B, y A^c y B^c también son eventos independientes. En general, si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos independientes, $A \in \mathcal{C}$, y B se obtiene a partir de los eventos en $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ mediante una secuencia finita de operaciones de conjuntos (como complementación, unión, intersección, resta de conjuntos, diferencia simétrica, unión numerable, intersección numerable) entonces A y B son independientes.*

Definición 4 [**Experimentos Independientes**] *Sea I un conjunto numerable de índices y $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una sucesión de experimentos con espacios de probabilidad $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)\}_{i\in I}$. Se dice que el experimento $\mathcal{E}$ dotado del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ corresponde a la realización simultánea e independiente de los experimentos $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ si $\Omega = \times_{i\in I}\Omega_i$ y se satisface que:*

- *si I es finito y $A_i \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$, entonces para todo $A = \times_{i\in I} A_i \subseteq \Omega$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}_i(A_i)$.*
- *si I es infinito, J es subconjunto finito de I, y $A_j \in \mathcal{F}_j$ para todo $j \in J$, entonces para todo $A = \times_{i\in I} B_i \subseteq \Omega$ tal que $B_i = \Omega_i$ si $i \notin J$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}_j(A_j)$.*

2 Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Definición 5 [**Variable Aleatoria**] *Una función $X{:}\Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$ se denomina variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definición 6 [**Función Distribución**] *Sea X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. La función $F_X{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F_X(t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$ se llama función distribución de X.*

En lo que sigue sea X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Convención 2 *Los eventos $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$, $\{\omega \in \Omega : t \leq X(\omega) < t'\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t\}$, y $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}$, los denotaremos por $\{X \leq t\}$, $\{t \leq X < t'\}$, $\{X > t\}$, $\{X = t\}$, y $\{X \in A\}$ respectivamente.*

Proposición 4 *Si F es una función distribución entonces*

1. *F es no–decreciente, i.e., si $t \leq t'$ entonces $F(t) \leq F(t')$.*
2. *$\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ y $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.*
3. *F es continua por la derecha, i.e., si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente convergente a t, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \;=\; F(t)\,.$$

Corolario 1 *Si F es una función distribución discontinua en t entonces sólo puede tener una discontinuidad de salto en t, i.e., si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente convergentes a t, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \;<\; F(t)\,.$$

Proposición 5 *Si F es una función distribución entonces tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.*

3 Variables Aleatorias Discretas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 7 [Variable Aleatoria Discreta] *Se dice que X es una variable aleatoria discreta si toma a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si $S_X = \{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{X = a\}) > 0\}$ es numerable y $\mathbb{P}(S_X) = 1$. Al conjunto S_X se le denomina soporte de X y a la función $p_X{:}\mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $p_X(a) = \mathbb{P}(\{X = a\})$ se le denomina función densidad de probabilidad de X.*

Proposición 6 *Sea X una variable aleatoria discreta, se tiene que*

1. *si $a \in S_X$, entonces $p_X(a) > 0$.*
2. *si $a \notin S_X$, entonces $p_X(a) = 0$.*
3. *$\sum_{a\in S_X} p_X(a) = 1$.*
4. *la función densidad de probabilidad de X determina la función distribución de X, en particular,*
$$F_X(t) \;=\; \sum_{a\in S_X : a\leq t} p_X(a)\,.$$

Modelos discretos: A continuación se da la fórmula de la función de densidad probabilidad p_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X discretas. También se especifica el soporte S_X de cada tipo de variable aleatoria distribución.

BERNOULLI: X es una Bernoulli de parámetro $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, si

$$p_X(i) \quad = \quad p^i(1-p)^{1-i}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,1\}\,.$$

BINOMIAL: X es una binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim \text{Binomial}(n,p)$, si

$$p_X(i) \quad = \quad \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,\ldots,n\}\,.$$

GEOMÉTRICA: X es una geométrica de parámetro $p \in (0,1]$, i.e. $X \sim \text{Geomtrica}(p)$, si

$$p_X(i) \quad = \quad (1-p)^{i-1}p\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$

PASCAL: X es una Pascal de parámetros $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $p \in (0,1]$, i.e. $X \sim \text{Pascal}(r,p)$, si

$$p_X(i) \quad = \quad \binom{i-1}{r-1} p^r(1-p)^{i-r}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{r, r+1, r+2, \ldots\}\,.$$

HIPERGEOMÉTRICA: X es una hipergeométrica de parámetros $M, N, n \in \mathbb{N}$, $n \leq \max\{M,N\}$, i.e., $X \sim \text{Hiper}(n,N,M)$, si

$$p_X(i) \quad = \quad \frac{\binom{M}{i}\binom{N}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,\ldots,n\}\,.$$

POISSON: X es una Poisson de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, i.e. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, si

$$p_X(i) \quad = \quad \frac{1}{i!}\,\lambda^i\, e^{-\lambda}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \mathbb{N}.$$