MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**2 de Julio, 1999**

Pauta Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: M. Saez*

PROBLEMA 1:

(i.1).- Por definición de función generadora de momentos y dado que $\mathbb{I}_A$ es una variable aleatoria que toma valores 0 y 1,

$$\phi_X(t) \;=\; \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \;=\; e^{t\cdot 0}\mathbb{P}\left(\{\mathbb{I}_A = 0\}\right) + e^{t\cdot 1}\mathbb{P}\left(\{\mathbb{I}_A = 1\}\right) \;=\; 1 + (e^t - 1)\mathbb{P}\left(A\right) ,$$

donde la última igualdad se tiene porque $\mathbb{P}\left(\{\mathbb{I}_A = 1\}\right) = \mathbb{P}\left(A\right)$ y $\mathbb{P}\left(\{\mathbb{I}_A = 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\Omega \setminus A\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A\right)$.

(i.2).- Por propiedad de la $\mathbb{C}ov\left(\cdot,\cdot\right)$, dado que $\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B = \mathbb{I}_{A\cap B}$, y que $\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_C\right) = \mathbb{P}\left(C\right)$, tenemos que

$$\mathbb{C}ov\left(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\right) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A\cdot\mathbb{I}_B\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_B\right) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{A\cap B}\right) - \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_A\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_B\right) \;=\; \mathbb{P}\left(A\cap B\right) - \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right) .$$

Luego, $\mathbb{C}ov\left(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\right) = 0$ sí y sólo si $\mathbb{P}\left(A\cap B\right) = \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{P}\left(B\right)$, i.e., sí y sólo si A y B son independientes.

(ii.1).- Basta observar que

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((X_i - \widehat{\mu}_n) - (\widehat{\mu}_n - \mu))^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 - 2(\widehat{\mu}_n - \mu)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + (\widehat{\mu}_n - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 - (\widehat{\mu}_n - \mu)^2 ,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \widehat{\mu}_n - \mu$.

(ii.2).- Bastará probar que $\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty}\widehat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2\right\}\right) = 0$. Para ello, observar que $\lim_{n\to\infty}\widehat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2$ implica que $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 \neq \sigma^2$ o $\lim_{n\to\infty}\widehat{\mu}_n \neq \mu$. Luego,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty}\widehat{\sigma}_n^2 \neq \sigma^2\right\}\right) \;\leq\; \mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 \neq \sigma^2\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty}\widehat{\mu}_n \neq \mu\right\}\right) .$$

Pero, por Ley de los Grandes Números, versión fuerte,

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 \neq \sigma^2\right\}\right) \;=\; 0 , \qquad \text{y}\;\; \mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty}\widehat{\mu}_n \neq \mu\right\}\right) \;=\; 0 .$$

Juntando todo, se obtiene la conclusión deseada.

PROBLEMA 2:

(i).- Por linealidad de $\mathbb{E}(\cdot)$ y como $\mu = 0$, sigue que $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \mu = 0$. Además, como $X_1, \ldots, X_n$ son independientes y $\sigma^2 = 1$, $\mathbb{V}ar\,(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}ar\,(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n$.

(ii).- De la parte anterior y por la desigualdad de Chebyshev,

$$\mathbb{P}(\{|S_n| > a\}) \;=\; \mathbb{P}(\{|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > a\}) \;\leq\; \frac{\mathbb{V}ar\,(S_n)}{a^2} \;=\; \frac{n}{a^2}\,.$$

(iii).- Primero observemos que la función densidad de probabilidad de $X_1, \ldots, X_n$ es simétrica en torno al 0. La función densidad de probabilidad de S_n hereda esta propiedad. Luego, $\mathbb{P}(\{|S_n| > a\}) = 2\mathbb{P}(\{S_n > a\})$.

Por indicación y la desigualdad de Markov,

$$\mathbb{P}(\{S_n > a\}) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{e^{4a\cdot S_n/n} > e^{4a^2/n}\right\}\right) \;\leq\; \frac{\mathbb{E}\left(e^{4a\cdot S_n/n}\right)}{e^{4a^2/n}}\,.$$

Como $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ y $X_1, \ldots, X_n$ son independientes,

$$\mathbb{E}\left(e^{4a\cdot S_n/n}\right) \;=\; \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{4a\cdot X_i/n}\right) \;=\; \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{2a/n} - e^{-2a/n}}{2}\right) \;=\; \left(\frac{e^{2a/n} - e^{-2a/n}}{2}\right)^n\,.$$

Luego, de nuestros cálculos anteriores y la indicación,

$$\mathbb{P}(\{S_n > a\}) \;\leq\; \frac{\left(\frac{e^{2a/n} - e^{-2a/n}}{2}\right)^n}{e^{4a^2/n}} \;\leq\; \frac{\left(e^{2a^2/n^2}\right)^n}{e^{4a^2/n}} \;=\; \frac{e^{2a^2/n}}{e^{4a^2/n}} \;=\; e^{-2a^2/n}\,.$$

En resumen, $\mathbb{P}(\{|S_n|\}) \leq 2\,e^{-2a^2/n}$.

(iv).- Como $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, todas distribuidas de acuerdo a una Normal$(0,1)$, sigue que $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ se distribuye como una Normal$(\mathbb{E}(S_n), \mathbb{V}ar\,(S_n))$ = Normal$(0,n)$. Sigue que $(S_n - \mathbb{E}(S_n))/\sigma(S_n) = S_n/\sqrt{n}$. Luego, como $\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$,

$$\mathbb{P}(\{|S_n| \leq a\}) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{-\frac{a}{\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{a}{\sqrt{n}}\right\}\right) \;=\; \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{n}}\right) \;=\; 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) - 1\,.$$

La conclusión deseada se obtiene observando que $\mathbb{P}(\{|S_n| > a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{|S_n| \leq a\})$.

(v).- Si n es grande, entonces aunque no se conozca la distribución de $X_1, \ldots, X_n$, el hecho de que $X_1, \ldots, X_n$ sean independientes e idénticamente distribuidas permite aplicar el Teorema Central del Límite y concluir que $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ se distribuye (aproximadamente) como una Normal$(\mathbb{E}(S_n), \mathbb{V}ar\,(S_n))$ = Normal$(0,n)$. Luego, el resultado obtenido en (iv) es igual pero aproximadamente valido, i.e., ahora,

$$\mathbb{P}(\{|S_n| > a\}) \quad\approx\quad 2 - 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

PROBLEMA 3:

(i).- Si $n \in \mathbb{N}$ es impar entonces la función $t^n f_X(t)$ es impar, luego

$$\mathbb{E}\left(X^n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t) dt = 0 .$$

Como la función densidad de una Normal$(0,1)$ es una función par lo anterior implica que todos los momentos de dicha normal de orden impar son iguales a 0.

(ii.1).- Integrando en $\mathbb{R}$ la función densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ con respecto a y,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y+x)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} ,$$

donde la segunda igualdad se debe a que la integral vale 1 pues el término bajo la integral es la función densidad de una Normal$(-x,1)$.

Integrando en $\mathbb{R}$ la función densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ con respecto a x,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sqrt{2}})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x+\frac{y}{2}}{1/\sqrt{2}})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sqrt{2}})^2} ,$$

donde la segunda igualdad se debe a que la integral vale 1 pues el término bajo la integral es la función densidad de una Normal$(-y/2, 1/2)$.

Sigue que X se distribuye como una Normal$(0,1)$ e Y se distribuye como una Normal$(0,2)$.

(ii.2).- Primero, recordar que $\rho(X,Y) = \mathbb{C}ov\,(X,Y)/(\sigma(X)\sigma(Y))$. De la parte anterior, sabemos que $\sigma(X) = 1$ y que $\sigma(Y) = \sqrt{2}$. Por otro lado, $\mathbb{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$. De la parte anterior, sabemos que $\mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(Y\right) = 0$. Sólo nos queda calcular $\mathbb{E}\left(XY\right)$.

Observemos entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(XY\right) &= \int\int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y+x)^2} dy \right) dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= -1 ,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se debe a que la segunda integral corresponde a la esperanza de una Normal$(-x,1)$, i.e., vale $-x$, y la última igualdad se debe a que la integral corresponde a la varianza de una Normal$(0,1)$, i.e., vale 1.

Concluimos entonces que

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(X\right) \cdot \mathbb{E}\left(Y\right)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{-1 - 0 \cdot 0}{1 \cdot \sqrt{2}} = -1 .$$