MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**7 de Junio, 1999**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: M. Saez*

PROBLEMA 1:

(i).- Primero determinemos el valor de la constante c. Para ello observamos que,

$$1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = c\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)}dxdy = c\left(\int_0^\infty e^{-t}dt\right)^2 = c\left(\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty\right)^2 = c\,,$$

donde la primera igualdad es por propiedad de toda función densidad y el resto de las igualdades son obvias. Luego, $c = 1$.

Además, como X e Y sólo toman valores no–negativos, si $a < 0$ entonces $\mathbb{P}\left(\{\min\{X,Y\} \leq a\}\right) = 0$. Supongamos entonces que $a \geq 0$. Sigue que,

$$\mathbb{P}\left(\{\min\{X,Y\} \leq a\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\{\min\{X,Y\} > a\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\{X > a, Y > a\}\right)$$

Pero,

$$\mathbb{P}\left(\{X > a, Y > a\}\right) = \int_a^\infty \int_a^\infty e^{-(x+y)}dxdy = \left(\int_a^\infty e^{-t}dt\right)^2 = \left(\left(-e^{-t}\right)\Big|_a^\infty\right)^2 = e^{-2a}\,.$$

Luego, la probabilidad pedida es $1 - e^{-2a}$.

(ii).- La primera igualdad se tiene por definición de probabilidades condicionales. Luego,

$$\mathbb{P}\left(\{X = k\} \,|\, \{X + Y = n\}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\{X = k\}, \{Y = n - k\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X + Y = n\}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(\{X = k\}\right)\mathbb{P}\left(\{Y = n - k\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X + Y = n\}\right)}\,,$$

donde la segunda igualdad se tiene porque X e Y son independientes. Dado que conocemos la distribución de X e Y sabemos cuanto valen $\mathbb{P}\left(\{X = k\}\right)$ y $\mathbb{P}\left(\{Y = n - k\}\right)$. Además, dado que la suma de dos variables aleatorias independientes distribuidas como una Binomial(n,p) y Binomial(m,p) es una Binomial$(n+m,p)$, sigue que también conocemos el valor de $\mathbb{P}\left(\{X + Y = n\}\right)$. Luego,

$$\mathbb{P}\left(\{X = k\} \,|\, \{X + Y = n\}\right) = \frac{\binom{N_X}{k} p^k (1-p)^{N_X - k} \binom{N_Y}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{N_Y-(n-k)}}{\binom{N_X + N_Y}{n} p^n (1-p)^{N_X + N_Y - n}}\,.$$

Simplificando se obtiene la conclusión deseada.

Para interpretar la fórmula, supongamos que se lanzan N_X monedas negras y N_Y monedas blancas, todas con probabilidad p de salir cara. Sea X el número de monedas negras que salieron e Y el número de monedas blancas. La probabilidad que $X = k$ dado que $X + Y = n$ debe ser igual a la probabilidad de observar k bolas negras cuando se extraen n bolas de una urna que contiene N_X bolas negras y N_Y bolas blancas, i.e., la probabilidad que una Hiper(n, N_X, N_Y) sea igual a k.

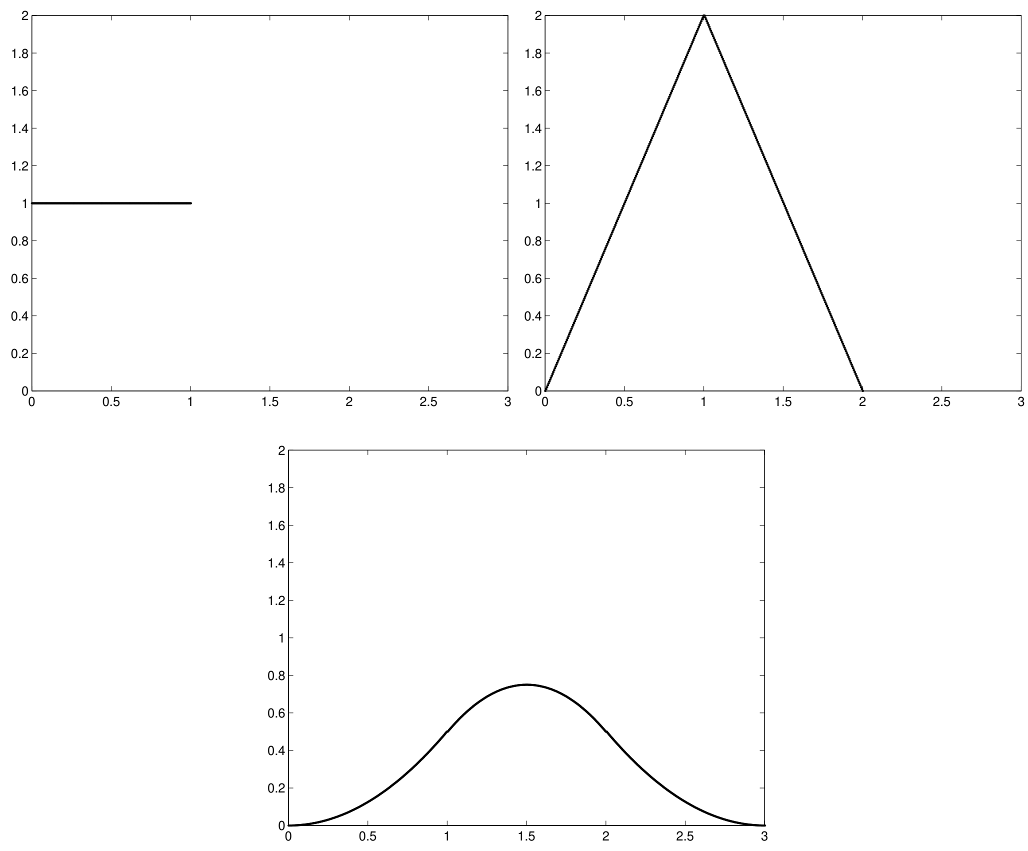

Figura 1: Funciones densidad de f_{S_1}, f_{S_2}, y f_{S_3}.

(iii).- Evaluando f_{S_1}, f_{S_2}, y f_{S_3} observamos que

$$f_{S_1(t)} = \begin{cases} 1\,, & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$f_{S_3(t)} = \begin{cases} t\,, & \text{si } 0 < t < 1, \\ t - 2(t-1)\,, & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$f_{S_3(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2\,, & \text{si } 0 < t < 1, \\ \frac{1}{2}(t^2 - 3(t-1)^2)\,, & \text{si } 1 \leq t < 2, \\ \frac{1}{2}(t^2 - 3(t-1)^2 + 3(t-2)^2)\,, & \text{si } 2 \leq t < 3, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Los grafos correspondientes a cada una de las anteriores funciones densidad se muestran en la Fig. 1.

Por definición, la mediana de una variable aleatoria es aquel número real m tal que el área tanto a la derecha como a la izquierda de m bajo la curva de la función densidad de la variable aleatoria es la misma. Luego, de la Fig. 1 se desprende que las medianas de $S_!$, S_2, y S_3 son $1/2$, 1, y $3/2$

respectivamente.

Problema 2:

(i).- Probemos por inducción que para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, $X_1+\cdots+X_i, X_{i+1},\ldots,X_n$ son independientes. En particular, se tendrá que $X_1+\cdots+X_i, X_{i+1}$ son independientes. En efecto, para $i=1$ la afirmación se tiene por enunciado. Supongamos que se cumple para $i-1$. Tenemos entonces que $X_1+\cdots+X_{i-1}, X_i,\ldots,X_n$ son independientes, reemplazando $X_1+\cdots+X_{i-1}$ y X_i por su suma, se tiene por indicación que $X_1+\cdots+X_i, X_{i+1},\ldots,X_n$ son independientes. Esto concluye la demostración por inducción.

Un argumento similar, pero basado en una doble inducción sobre i,j permite concluir que $X_1+\cdots+X_i, X_{i+1},\ldots,X_n, Y_1+\cdots+Y_j, Y_{j+1},\ldots,Y_n$ son independientes para todo $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. En particular, se tiene que $X=X_1+\cdots+X_n$ es independiente de $Y=Y_1+\cdots+Y_n$.

(ii).- Primero observemos que una Gama$(1,\lambda)$ es una Exponencial(λ). Luego, $n-1$ aplicaciones de la indicación y de (i) permiten concluir que $X=X_1+\cdots+X_n$ se distribuye como una Gama(n,λ). El mismo argumento muestra que Y se distribuye también como una Gama(n,λ).

(iii).- Sea $\vec{g}:(0,\infty)\times(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)\times(0,1)$ tal que

$$\vec{g}(X,Y) \;=\; \begin{pmatrix} g_1(X,Y) \\ g_2(X,Y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X+Y \\ X/(X+Y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Observar que cualquiera sea $u\in(0,\infty)$ y $v\in(0,1)$ el sistema

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x/(x+y) \end{aligned}$$

tiene solución única $x=h_1(u,v)=uv$ e $y=h_2(u,v)=u(1-v)$. Además,

$$J_{\vec{g}(x,y)}(x,y) \;=\; Det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} \;=\; Det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & -\dfrac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix} \;=\; -\frac{1}{x+y}.$$

Luego, $J_{\vec{g}(x,y)}(x,y)\neq 0$ cualquiera sea $x,y\in(0,\infty)$.

Dado que se cumplen todas las condiciones para poder aplicar el método del Jacobiano, por medio de él, concluimos que $f_{U,V}(u,v)=0$ si $u<0$ o $v\notin(0,1)$, y si $u\in(0,\infty)$ y $v\in(0,1)$,

$$f_{U,V}(u,v) \;=\; \frac{f_{X,Y}(uv,u(1-v))}{|J_{\vec{g}}(uv,u(1{-}v))|} \;=\; \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{2n-1}}{(2n{-}1)!}\cdot\frac{(2n{-}1)!}{(n{-}1)!(n{-}1)!}\,v^{n-1}(1-v)^{n-1},$$

Integrando la función densidad de una Gama$(2n-1,\lambda)$ sobre $\mathbb{R}$ observamos que

$$\int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{2n-1}}{(2n{-}1)!}du \;=\; 1.$$

Luego, integrando en $\mathbb{R}$ con respecto a u la función densidad conjunta $f_{U,V}(u,v)$ obtenemos la densidad marginal de V,

$$f_V(v) \;=\; \begin{cases} \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}v^{n-1}(1-v)^{n-1}, & \text{si } v\in(0,\infty), \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Integrando en $\mathbb{R}$ con respecto a v la función densidad conjunta $f_{U,V}(u,v)$ y utilizando la indicación obtenemos la densidad marginal de U,

$$f_U(u) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,, & \text{si } u > 0, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(iv).- La probabilidad que se pide calcular es la probabilidad que $V = X/(X+Y) > 2/3$. Si $n = 2$, entonces $f_V(v) = 6v(1-v)$ si $v \in (0,1)$ y 0 en caso contrario. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{V > 2/3\}) &= \int_{2/3}^{\infty} f_V(v)dv \;=\; 6\int_{2/3}^{1} v(1-v)dv \;=\; 6\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right)\Big|_{2/3}^{1} \;=\; (3v^2 - 2v^3)\big|_{2/3}^{1} \\ &= 3 - 2 - \frac{4}{3} + \frac{16}{27} \;=\; 1 - \frac{36}{27} + \frac{16}{27} \;=\; \frac{7}{27}\,. \end{aligned}$$

Otra alternativa para calcular la probabilidad pedida es observar que $V = X/(X+Y) > 2/3$ sí y sólo si $X > 2Y$. Pero, como X e Y son variables aleatorias independientes distribuidas de acuerdo a una Gama$(2,\lambda)$ se tiene que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)$ si $x, y > 0$ y 0 en caso contrario. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X > 2Y\}) &= \int\!\!\int_{(x,y):x>2y} f_{X,Y}(x,y)dydx \;=\; \int_0^{\infty}\int_0^{x/2} \lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)dxdy \\ &= \int_0^{\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}\left(\int_0^{x/2} \lambda^2 y e^{-\lambda y}dy\right)dx\,. \end{aligned}$$

Un cálculo simple pero largo lleva a que la última integral es igual a $7/27$.