MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **8 de Mayo, 1999**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

Problema 1: (40%)

(i).- Sea E_n el evento correspondiente a la afirmación "la familia tiene n hijos." La probabilidad que se pide calcular es $\mathbb{P}(E_0)$. Observar que los eventos E_n son disjuntos, i.e., si $n \neq m$ entonces $E_n \cap E_m = \emptyset$. Además, como la cantidad de hijos que tiene una familia cualquiera es un número no–negativo, necesariamente se tiene que $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ ocurre con probabilidad 1. Luego,

$$1 \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \;=\; \mathbb{P}(E_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \;=\; \mathbb{P}(E_0) + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} p^n \;=\; \mathbb{P}(E_0) + \alpha \cdot \frac{p}{1-p}\,,$$

donde la segunda igualdad se obtiene por σ-aditividad, la tercera es evidente, la cuarta se obtiene del hecho que $\mathbb{P}(E_n) = \alpha \cdot p^n$ para $n \geq 1$, y la última igualdad de la fórmula de la suma de una sucesión geométrica.

Despejando, concluimos que

$$\mathbb{P}(E_0) \;=\; 1 - \alpha \cdot \frac{p}{1-p}\,.$$

(ii).- Observar que

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}(\{\alpha \cdot X + \beta \leq t\}) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{X \leq \frac{t-\beta}{\alpha}\right\}\right) \;=\; F_X\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)\,,$$

donde la primera igualdad es por definición de función distribución, la segunda se obtiene despejando, y la última es nuevamente por definición de función distribución. Para concluir, observar que por enunciado sabemos que $F_X \equiv F$, luego

$$F_Y(t) \;=\; F\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)\,.$$

(iii).- Sea C_i el evento que corresponde a la afirmación "la bola que se extrae de la urna i es blanca." Sea D el evento asociado a la afirmación "se extraen exactamente dos bolas blancas." Queremos calcular

$$\mathbb{P}(C_1|D) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(C_1 D)}{\mathbb{P}(D)}\,. \tag{1}$$

Debemos determinar la probabilidad que $C_1 D$ ocurra y también la probabilidad de que D ocurra.

Del enunciado sabemos que $\mathbb{P}(C_1) = 1/3$, $\mathbb{P}(C_2) = 2/3$, y $\mathbb{P}(C_3) = 1/4$.

Calculemos primero la probabilidad de que ocurra D. Dado que D es la unión disjunta de los eventos $C_1 C_2 C_3^c$, $C_1 C_2^c C_3$, y $C_1^c C_2 C_3$, sigue que

$$\mathbb{P}(D) \;=\; \mathbb{P}(C_1 C_2 C_3^c) + \mathbb{P}(C_1 C_2^c C_3) + \mathbb{P}(C_1^c C_2 C_3)\,.$$

Luego, por independencia de los C_i sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2)\,\mathbb{P}(C_3^c) + \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2^c)\,\mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(C_1^c)\,\mathbb{P}(C_2)\,\mathbb{P}(C_3) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Concluimos que $\mathbb{P}(D) = 11/36$.

Calculemos ahora la probabilidad que C_1D ocurra. Dado que C_1D es la unión disjunta de los eventos $C_1C_2C_3^c$ y $C_1C_2^cC_3$, sigue que

$$\mathbb{P}(C_1D) \;=\; \mathbb{P}(C_1C_2C_3^c) + \mathbb{P}(C_1C_2^cC_3)\;.$$

Luego, por independencia de los C_i sigue que

$$\mathbb{P}(C_1D) \;=\; \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2)\,\mathbb{P}(C_3^c) + \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}(C_2^c)\,\mathbb{P}(C_3) \;=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\,.$$

Concluimos que $\mathbb{P}(C_1D) = 7/36$.

De los cálculos realizados y de (1) se concluye que la probabilidad de que la bola elegida de la primera urna sea blanca dado que exactamente 2 bolas blancas fueron extraídas es $7/11$.

Problema 2: (40%)

(i).- Por definición de soporte $\mathbb{P}(\{X=a\}) > 0$ para todo $a \in S_X$, i.e., $\mathbb{P}(C_a) > 0$ para todo $a \in S_X$. Además,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{a\in S_X} C_a\right) \;=\; \mathbb{P}(S_X) \;=\; 1\,,$$

donde la primera igualdad se obtiene observando que $S_X = \bigcup_{a\in S_X}\{\omega\in\Omega \,:\, X(\omega)=a\} = \bigcup_{a\in S_X} C_a$, y la segunda igualdad es una propiedad de toda variable aleatoria discreta. Finalmente, si $a, a' \in S_X$ son tales que $a \neq a'$ entonces

$$C_a \cap C_{a'} \;=\; \{\omega\in\Omega \,:\, X(\omega)=a\}\cap\{\omega\in\Omega \,:\, X(\omega)=a'\} \;=\; \{\omega\in\Omega \,:\, X(\omega)=a, X(\omega)=a'\} \;=\; \emptyset\,,$$

donde la primera igualdad es por definición de C_a y $C_{a'}$, la segunda es obvia, y la última sigue del hecho que X es una función por lo que no puede tomar dos valores distintos en $\omega\in\Omega$. Luego, para $a, a' \in S_X$ tales que $a \neq a'$ tenemos que

$$\mathbb{P}(C_aC_{a'}) \;=\; \mathbb{P}(\emptyset) \;=\; 0\,.$$

(ii).- Por (i) y Regla de Probabilidades Totales se tiene que

$$\mathbb{P}(\{X+Y=c\}) \;=\; \sum_{a\in S_X} \mathbb{P}(\{X+Y=c\}\cap\{X=a\})\;.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X+Y=c\}) &= \sum_{a\in S_X} \mathbb{P}(\{Y=c-a\}\cap\{X=a\}) \\ &= \sum_{a\in S_X} \mathbb{P}(\{Y=c-a\})\cdot\mathbb{P}(\{X=a\}) \\ &= \sum_{a\in S_X} p_Y(c-a)\cdot p_X(a)\,,\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia del hecho que $X+Y=c$ y $X=a$ sí y sólo si $Y=c-a$ y $X=a$, la segunda porque X e Y son variables aleatorias independientes, y la última por definición de $p_X(\cdot)$ y $p_Y(\cdot)$.

Un argumento análogo, pero intercambiando el rol de X e Y, permite concluir que

$$\mathbb{P}\left(\{X+Y=c\}\right) \;=\; \sum_{b\in S_Y} p_X(c-b)\cdot p_Y(b)\,.$$

(iii).- Recordar que el soporte de una variable aleatoria de Poisson es $\mathbb{N}$. Luego el soporte de la suma de dos variables aleatorias de Poisson, en particular de $X+Y$, está contenido en $\mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{P}\left(\{X+Y=n\}\right)=0$ si $n\notin\mathbb{N}$. Calculemos entonces el valor exacto que toma $\mathbb{P}\left(\{X+Y=n\}\right)$ cuando $n\in\mathbb{N}$. Por (ii) y dado que $S_X=S_Y=\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\{X+Y=n\}\right) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} p_X(i)\cdot p_Y(n-i) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N},n-i\in\mathbb{N}} p_X(i)\cdot p_Y(n-i) \;=\; \sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!}\,e^{-\alpha}\,\frac{\beta^{n-i}}{(n-i)!}\,e^{-\beta}\,,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de (ii), la segunda del hecho que $p_Y(n-i)=0$ si $n-i\notin\mathbb{N}$, y la tercera por definición de variable aleatoria de Poisson.

Sigue que

$$p_{X+Y}(n) \;=\; e^{-(\alpha+\beta)}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!\cdot(n-i)!}\,\alpha^i\beta^{n-i} \;=\; \frac{1}{n!}e^{-(\alpha+\beta)}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i\beta^{n-i} \;=\; \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}\,e^{-(\alpha+\beta)}\,.$$

En resumen, $X+Y$ se distribuye como una Poisson$(\alpha+\beta)$.

Problema 3: (20%)

Antes que se realice la primera búsqueda es igualmente probable que el avión se encuentre en cualquiera de las dos regiones. Dado que hay mayor probabilidad de éxito de encontrar el avión si este está en la primera región, entonces si sabemos que la primera búsqueda fue exitosa es más factible que el avión haya estado en la región donde es más fácil encontrarlo, i.e., en la primera región, i.e., $\mathbb{P}\left(R_1|E_1\right)>1/2$.

Si se realiza una búsqueda en ambas regiones y estas resultan infructuosas entonces esto aumenta la evidencia de que el avión este en la segunda región (porque el avión está en una de las dos regiones y es más fácil encontrarlo en la primera). Luego, cada búsqueda infructuosa decrece la probabilidad de encontrar el avión en la primera región. Pero si condicionamos en E_n y E_{n+1} entonces sabemos que ocurrieron $n-1$ y n búsquedas infructuosas respectivamente. Luego, se debe tener que $\mathbb{P}\left(R_1|E_n\right)>\mathbb{P}\left(R_1|E_{n+1}\right)$ y que $\mathbb{P}\left(R_1E_n\right)\to 0$ cuando $n\to\infty$.