MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**2 de Julio, 1999**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: M. Saez*

Tiempo: 3.0 hrs.

Problema 1:

(i).- Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para $C \in \mathcal{F}$ denotaremos por $\mathbb{I}_C$ la función indicatriz de C, i.e., $\mathbb{I}_C(\omega) = 1$ si $\omega \in C$, y $\mathbb{I}_C(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega \setminus C$. Sean $A, B \in \mathcal{F}$.

(i.1).- Calcule $\phi_{\mathbb{I}_A}(t)$ en términos de $\mathbb{P}(A)$.

(i.2).- Pruebe que A y B son independientes sí y sólo si $\mathbb{C}ov\left(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B\right) = 0$.

(ii).- A menudo se necesita estimar la dispersión de una variable aleatoria X cuya media y varianza se saben finitas pero son desconocidas. Para ello es usual obtener de manera independiente varios valores de la variable aleatoria, digamos $X_1, \ldots, X_n$, y estimar $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X)$ por

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu}_n)^2, \qquad \text{donde } \widehat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

(ii.1).- Si $\mu = \mathbb{E}(X)$ observe que $(X_i - \widehat{\mu}_n)^2 = ((X_i - \mu) - (\widehat{\mu}_n - \mu))^2$ y pruebe que

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - (\widehat{\mu}_n - \mu)^2 .$$

(ii.2).- Justifique la elección del estimador $\widehat{\sigma}_n^2$ estableciendo que $\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma}_n^2 = \sigma^2\right\}\right) = 1$.

Problema 2: Sea $a > 0$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas todas con medias y varianzas tales que $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, y sea $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

(i).- (1.0 pts) Calcule $\mathbb{E}(S_n)$ y $\mathbb{V}ar(S_n)$.

(ii).- (1.0 pts) Use la desigualdad de Chebyshev para acotar $\mathbb{P}(\{|S_n| > a\})$.

(iii).- (2.0 pts) **[Cota de Chernoff]** Pruebe que si $\mathbb{P}\left(X_i = +\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X_i = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, entonces

$$\mathbb{P}(\{|S_n| > a\}) = 2\,\mathbb{P}(\{S_n > a\}) < 2\,e^{-2a^2/n} .$$

Indicación: Use que $S_n > a$ sí y sólo si $e^{4a\cdot S_n/n} > e^{4a^2/n}$, aplique la desigualdad de Markov, y use que $\frac{1}{2}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) \le e^{\lambda^2/2}$.

(iv).- (1.0 pts) Si $\Phi(\cdot)$ denota la función distribución de una Normal$(0,1)$ y $X_1, \ldots, X_n$ se distribuyen de acuerdo a una Normal$(0,1)$, pruebe que,

$$\mathbb{P}\left(\{|S_n| > a\}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right).$$

(v).- (1.0 pts) Si n es grande y no se conoce la distribución de $X_1, \ldots, X_n$ ¿que se puede decir acerca de $\mathbb{P}\left(\{|S_n| > a\}\right)$?

PROBLEMA 3:

(i).- (2.0 pts) Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con función densidad $f_X(\cdot)$ par, i.e., $f_X(-t) = f_X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\mathbb{E}\left(X^n\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ impar. Concluya que si $n \in \mathbb{N}$ es impar y X se distribuye como una Normal$(0,1)$ entonces $\mathbb{E}\left(X^n\right) = 0$.

(ii).- (4.0 pts) Sea (X, Y) un vector aleatorio normal bivariado con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(2x^2+y^2+2xy)}.$$

(ii.1).- Determine f_X y f_Y. (<u>Indicación</u>: Complete cuadrados.)

(ii.2).- Verifique que $\rho(X,Y) = -1/\sqrt{2}$.