MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **7 de Junio, 1999**

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

TIEMPO: 3 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean X e Y variables aleatorias absolutamente continuas con función densidad conjunta

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} c \cdot e^{-(x+y)}, & 0 \leq x < \infty,\, 0 \leq y < \infty, \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde c es un parámetro cuyo valor se desconoce. Calcule $\mathbb{P}\left(\{\min\{X,Y\} \leq a\}\right)$.

(ii).- Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que X se distribuye como una Binomial(N_X, p) e Y como una Binomial(N_Y, p). Sea además $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq \min\{N_X, N_Y\}$. Pruebe que la distribución condicional de X dado $X+Y=n$ se distribuye de acuerdo a una Hiper(n, N_X+N_Y, N_X), i.e., para todo $k \in \{0,\ldots,n\}$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\{X=k\} \,|\, \{X+Y=n\}\right) \;=\; \frac{\mathbb{P}\left(\{X=k, X+Y=n\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X+Y=n\}\right)} \quad = \quad \frac{\binom{N_X}{k}\binom{N_Y}{n-k}}{\binom{N_X+N_Y}{n}}.$$

Interprete, en palabras, el resultado enunciado.

(iii).- Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas de acuerdo a una Uniforme$(0,1)$ y $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, entonces se verifica (no lo pruebe) que

$$f_{S_n}(t) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{0 \leq j \leq t} (-1)^j \binom{n}{j} (t-j)^{n-1}, & \text{si } 0 < t < n, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Grafique f_{S_1}, f_{S_2}, f_{S_3}, y determine la mediana de las variables aleatorias S_1, S_2, y S_3 (la mediana de una variable aleatoria absolutamente continua con distribución $F{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el número $m \in \mathbb{R}$ tal que $F(m) = 1/2$).

PROBLEMA 2: Dos costureras están a punto de romper su sociedad producto de las constantes discusiones que surgen entre ellas debido a que, a menudo, la cantidad de tiempo invertido por ellas para satisfacer cada pedido que reciben es muy desigual.

Suponga que el tiempo que cada costurera se demora en realizar una prenda se distribuye de acuerdo a una Exponencial(λ) (independiente de la prenda que sea y de cuanto se demore en las otras prendas). Suponga además que cada costurera debe realizar n prendas y que la primera costurera se demora

$X_1, \ldots, X_n$ en cada prenda respectivamente. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ definidas en forma análoga pero con respecto a la segunda costurera.

(i).- (1.0 pts) Pruebe que $X_1 + \ldots + X_i$ es independiente de X_{i+1} cualquiera sea $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ y que $X = X_1 + \ldots + X_n$ e $Y = Y_1 + \ldots + Y_n$ también son independientes.

Indicación: Utilice (sin demostrarlo) que si un conjunto de m variables aleatorias son independientes, entonces al reemplazar dos cualquiera de ellas por su suma se obtiene un conjunto de $m-1$ variables aleatorias independientes.

(ii).- (1.0 pts) Pruebe que tanto X como Y se distribuyen como una Gama(n, λ), i.e.,

$$f_X(t) \;=\; f_Y(t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Indicación: Observe que una exponencial es un caso particular de una Gama$(\cdot, \cdot)$ y utilice el resultado visto en auxiliar que dice que la suma de dos variables aleatorias independientes distribuidas como una Gama(u, λ) y Gama(v, λ) es una Gama$(u + v, \lambda)$.

(iii).- (3.0 pts) Use el método del Jacobiano para determinar las funciones densidad de $X + Y$ y $X/(X + Y)$.

Indicación: $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!} t^{n-1}(1-t)^{n-1} dt = 1.$

(iv).- (1.0 pts) Verifique que si $n = 2$ entonces la probabilidad que la primera costurera se demore más de dos tercios del total del tiempo invertido por ambas costureras es $7/27$.