MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **8 de Mayo, 1999**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

TIEMPO: 2.5 HRS.

PROBLEMA 1: (40%)

(i).- Una familia tiene n hijos con probabilidad $\alpha \cdot p^n$, $n \geq 1$, donde $\alpha \leq (1-p)/p$. Calcule la probabilidad de que una familia no tenga hijos.

(ii).- Sea X es una variable aleatoria con función distribución F conocida y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$. Calcule en términos de F, α, y β, la función distribución de la variable aleatoria $Y = \alpha \cdot X + \beta$.

(iii).- Considere 3 urnas. La primera urna contiene 2 bolas blancas y 4 negras; la segunda urna contiene 8 bolas blancas y 4 negras; la tercera urna contiene 1 bola blanca y 3 negras. Calcule la probabilidad que la bola elegida de la primera urna sea blanca dado que exactamente 2 bolas blancas fueron elegidas.

PROBLEMA 2: (40%)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias discretas sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Se dice que X e Y son independientes si

$$\forall\, a \in S_X, \forall\, b \in S_Y, \qquad \mathbb{P}\left(\{X=a\} \cap \{Y=b\}\right) \;=\; p_X(a) \cdot p_Y(b)\,.$$

(i).- Para $a \in S_X$ defina $C_a = \{X = a\}$ y pruebe que $\{C_a\}_{a \in S_X}$ es una $\mathbb{P}$-partición, i.e., que $\mathbb{P}(C_a) > 0$, $\mathbb{P}(\cup_{a \in S_X} C_a) = 1$, y para todo $a, a' \in S_X$ tal que $a \neq a'$ se tiene que $\mathbb{P}(C_a C_{a'}) = 0$.

(ii).- Pruebe que si X e Y son variables aleatorias independientes entonces

$$\mathbb{P}\left(\{X+Y=c\}\right) \;=\; \sum_{a \in S_X} p_X(a) \cdot p_Y(c-a) \;=\; \sum_{b \in S_Y} p_X(c-b) \cdot p_Y(b)\,.$$

(iii).- Suponga que X e Y son variables aleatorias independientes que se distribuyen como una Poisson(α) y Poisson(β) respectivamente. Pruebe que $X+Y$ se distribuye como una Poisson($\alpha+\beta$).

PROBLEMA 3: (20%)

Se sabe que un avión se estrello en una de dos posibles regiones y no existen motivos para creer que sea más factible que este en una u otra región. Si el avión está en la primera región entonces la probabilidad que una búsqueda lo encuentre es $1/2$ y si está en la segunda la misma probabilidad es $1/4$. Suponga que cada día se realiza una búsqueda en ambas regiones. Si R_1 corresponde al evento "el avión está en la primera región" y E_n el evento "el avión se encontró el n-ésimo día," entonces se puede verificar (no lo haga) que $\mathbb{P}(R_1/E_n) = \dfrac{1}{1+3^{n-1}/2^n}$. De una explicación informal (en palabras) de porque $\mathbb{P}(R_1/E_1) > 1/2$, $\mathbb{P}(R_1/E_n)$ es decreciente como función de n, y $\mathbb{P}(R_1/E_n)$ converge a 0 cuando $n \to \infty$.