MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **5 de Abril, 1999**

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: M. Saez*

Tiempo: 3 hrs.

Problema 1: Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

(i).- Pruebe el caso infinito de la desigualdad de Boole, i.e. que si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

Indicación: Considere la sucesión creciente $(F_m)_{m=0}^{\infty}$, donde $F_m = \bigcup_{n=0}^{m} E_n$.

(ii).- Sean $E, F \in \mathcal{F}$. Se dice que E y F son independientes si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F)$. Se dice que E acarrea información negativa (respectivamente positiva) acerca de F si $\mathbb{P}(E) \neq 0$ y $\mathbb{P}(E \cap F) / \mathbb{P}(E) < \mathbb{P}(F)$ (respectivamente $\mathbb{P}(E \cap F) / \mathbb{P}(E) > \mathbb{P}(F)$).

Para el experimento que consiste en lanzar dos dados perfectos de ejemplos de eventos tales que

1. E es independiente de F.
2. E acarrea información negativa acerca de F.
3. E acarrea información positiva acerca de F.

Problema 2:

(i).- Tres parejas, digamos A, B y C, se sientan en una fila. Suponga que todos los ordenamientos son igualmente probables.

1. Pruebe que hay $2^3 \cdot 3!$ ordenamientos distintos tales que todos los esposos quedan sentados junto a sus respectivas esposas.
2. Pruebe que la probabilidad que algún esposo se siente junto a su respectiva esposa es $2/3$.
   Indicación: Utilice el principio de inclusión/exclusión.

(ii).- Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 bolas negras. Los jugadores A y B se turnan en sacar bolas de la urna hasta que se obtiene una bola roja. El jugador A parte. Pruebe que la probabilidad que A elija la bola roja es $7/12$. (Indique claramente los supuestos que haga, el espacio muestral que va a ocupar, conjunto de eventos de interés, y medida de probabilidad con la que va a trabajar.)

Indicación: Primero pruebe que la probabilidad que A saque la bola roja en el turno 1, 3, 5, y 7, es $3/10$, $7/40$, $1/12$, y $1/40$ respectivamente.

Problema 3: En una dimensión extraña existen unas tierras a las cuales sus habitantes se refieren como la república independiente de B. Dicha república posee una rica y siempre cambiante mitología lo que explica en parte porque los habitantes de B han desarrollado peculiares creencias y argumentos. Entre estos últimos destaca el *argumento de la pendiente positiva* el cual sostiene que si en un ramo las notas de un estudiante son crecientes entonces, independiente del promedio de las notas, el estudiante merece ser aprobado.[1]

Todos los fines de semestre al profesor K le relatan el mencionado argumento hasta que le asalta la duda de si el hecho, al parecer frecuente, que ocurran sucesiones crecientes de notas cuyo promedio es menor a 3.95 puede ser explicado simplemente como un evento de probabilidad no despreciable. Para librarse de la duda el profesor K considera un curso que tiene k evaluaciones y que en cada evaluación las notas finales posibles son $N = \{0, \ldots, m\}$, donde m es par. Además, hace el supuesto de que todos los resultados en $\Omega_k = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_i \in N\}$ tienen la misma probabilidad de ser las notas obtenidas por un alumno en las k evaluaciones. Finalmente, define los eventos asociados a las afirmaciones "las notas correspondientes a las k evaluaciones es una sucesión creciente" y "las notas correspondientes a las k evaluaciones es una sucesión creciente cuyo promedio es menor a $m/2$," i.e.,

$$E_k = \{\omega \in \Omega_k : \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k\}, \qquad \text{y} \qquad E_k^- = \{\omega \in E_k : \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \omega_i < \frac{m-1}{2}\}.$$

Siendo de profesión matemático el profesor K da por resuelto el problema una vez que prueba la existencia y unicidad de $\mathbb{P}\left(E_k^-\right)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. A Ud. se le pide realizar los cálculos para determinar el valor de $\mathbb{P}\left(E_k^-\right)$ en los casos de mayor interés, i.e. $k \in \{2, 3, 4\}$. Para ello siga los siguientes pasos:

(i).- Determine $|\Omega_k|$ en función de m.

(ii).- Calcule $|E_2|$, $|E_3|$, y $|E_4|$ en función de m y concluya que $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(E_4\right) = \frac{1}{4!}$.

(iii).- Señale a que afirmación está asociado el evento

$$E_4^+ = \{\omega \in E_4 : \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \omega_i > \frac{m+1}{2}\},$$

y pruebe combinatorialmente que $|E_4^-| = |E_4^+|$.

<u>Indicación</u>: Observar que $\omega_i \in N$ sí y sólo si $m - \omega_i \in N$.

(iv).- Concluya que $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(E_4^-\right) = \frac{1}{2 \cdot 4!}$.

<u>Indicación</u>: Puede utilizar, sin demostrarlo, que $\left|E_4 \setminus (E_4^- \cup E_4^+)\right| < 5m^3/6$.

(v).- Argumente que los supuestos del profesor K son erróneos y que bajo supuestos más razonables (explicitelos) el límite de la probabilidad calculada en (iv) es en realidad menor.

(vi).- Argumente como en (v) que los supuestos del profesor K son erróneos, pero ahora para justificar que el límite de la probabilidad calculada en (iv) es en realidad mayor.

---

[1] En la república de B hay muchas variantes distintas del argumento de la pendiente positiva. La versión descrita aquí es la más simple.