MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**24 de Agosto, 1998**

III – Probabilidades Condicionales

Prof. Cátedra: M. Kiwi | *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible dotado de la medida de probabilidad $\mathbb{P}(\cdot)$, i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ es un espacio de probabilidad.

Convención 1 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos denotamos su intersección $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ por $A_1 A_2 \cdots A_n$.*

Definición 1 [**Probabilidad Condicional**] *Sean $E, F \in \mathcal{F}$ dos eventos tales que $\mathbb{P}(F) > 0$ se define la probabilidad de E dado F, denotado $\mathbb{P}(E/F)$, por $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(EF)/\mathbb{P}(F)$.*

Proposición 1 *Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_n/A_1 \cdots A_{n-1})\, \mathbb{P}(A_{n-1}/A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2/A_1)\, \mathbb{P}(A_1)\ .$$

Proposición 2 *Sea $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(F) > 0$ sigue que $\mathbb{P}(\cdot/F) : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que a E le asocia $\mathbb{P}(E/F)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definición 2 [**$\mathbb{P}$-partición**] *Sea I un conjunto de índices, se dice que $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ es una $\mathbb{P}$-partición si $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = 1$, y para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$ se tiene que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$.*

Proposición 3 *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de Ω entonces también es una $\mathbb{P}$-partición.*

Lema 1 [**Regla de Probabilidades Totales**] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una $\mathbb{P}$-partición. Sigue que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A/A_i)\, \mathbb{P}(A_i)\ .$$

Teorema 1 [**Teorema de Bayes**] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una $\mathbb{P}$-partición. Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ se tiene que*

$$\forall j \in I\,, \qquad \mathbb{P}(A_j/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\, \mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/A_j)\, \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A/A_i)\, \mathbb{P}(A_i)}\ .$$

Definición 3 [**Independencia**] *Se dice que $A, B \in \mathcal{F}$ son eventos independientes si $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$. En general, se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos independientes si para todo $n > 0$ y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\ .$$

Lema 2 *Si $A, B \in \mathcal{F}$ son eventos independientes entonces B y A, A y B^c, A^c y B, y A^c y B^c también son eventos independientes. En general, si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos independientes, $A \in \mathcal{C}$, y B se obtiene a partir de los eventos en $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ mediante una secuencia finita de operaciones de conjuntos (como complementación, unión, intersección, resta de conjuntos, diferencia simétrica, unión numerable, intersección numerable) entonces A y B son independientes.*

Definición 4 [**Experimentos Independientes**] *Sea I un conjunto numerable de índices y $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ una sucesión de experimentos con espacios de probabilidad $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i(\cdot))\}_{i \in I}$. Se dice que el experimento $\mathcal{E}$ dotado del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ corresponde a la realización simultánea e independiente de los experimentos $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ si $\Omega = \times_{i \in I} \Omega_i$ y las siguientes igualdades tienen sentido y se satisfacen:*

- *Si I es finito, entonces para todo $A = \times_{i \in I} A_i \subseteq \Omega$, se tiene que $\mathbb{P}(A) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}_i(A_i)$.*
- *Si I es infinito, entonces para todo J subconjunto finito de I, y para todo $A = \times_{i \in I} A_i \subseteq \Omega$ tal que $A_i = \Omega_i$ si $i \notin J$, se tiene que $\mathbb{P}(A) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}_j(A_j)$.*