MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **17 de Agosto, 1998**

II – Teoría Axiomática de Probabilidades

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

Definición 1 [**Medida de Probabilidad**] *Sea Ω un e.m. y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos de interés (técnicamente una σ-álgebra). Decimos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ si $\mathbb{P}$: $\mathcal{F} \to [0,1]$ es tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y satisface:*

[**σ-aditividad**] *para toda secuencia de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se tiene que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i)$.*

Proposición 1 *Se tiene que; (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, (ii) $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$, (iii) si $E \subseteq F$ entonces $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$. Además, $\mathbb{P}(\cdot)$ satisface:*

[**Aditividad finita**] *si I es un conjunto de índices finito, y $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ son tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(E_i)$.*

Lema 1 [**Principio de Inclusión–exclusión**] *Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq \Omega$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n),\end{aligned}$$

donde $\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} \mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$ se toma sobre todos los $\binom{n}{r}$ posibles subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ de tamaño r.

Definición 2 [**Espacios Equiprobables**] *Se dice que el espacio medible $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ es equiprobable con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{P}(\cdot)$ si existe algún $0 < p \leq 1$ tal que para todo $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p$.*

Lema 2 *Si $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ es un espacio medible equiprobable con respecto a la medida de probabilidad $\mathbb{P}(\cdot)$ entonces se tiene que Ω es finito y $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/|\Omega|$ cualquiera sea $\omega \in \Omega$. Más aún, $\mathbb{P}(E) = |E|/|\Omega|$ cualquiera sea $E \subseteq \Omega$.*

Se dice que $E_0, E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}, \ldots$ es una sucesión creciente (respectivamente decreciente) de eventos si $E_n \subseteq E_{n+1}$ (respectivamente $E_n \supseteq E_{n+1}$). En el caso de sucesiones crecientes definimos $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=0}^{n} E_n$ y en el caso de sucesiones decrecientes $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=0}^{n} E_n$.

Lema 3 [**Continuidad de la medida de probabilidad**] *Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una sucesión creciente o decreciente de eventos entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

Lema 4 [**Desigualdad de Boole**] *Sea I un conjunto numerable de índices y sea $\{E_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Se tiene que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(E_i)$.*