MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**19 de Octubre, 1998**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sean X e Y dos variables aleatorias independientes que se distribuyen de acuerdo a una Normal(μ, σ^2) donde $\mu = 1$ y $\sigma^2 = 4$. Utilizando la tabla que aparece en el reverso, calcular los dos dígitos más significativos de $\mathbb{P}(\{|X| \leq 1, Y \geq 2\})$.

(ii).- Sea $\lambda > 0$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, sea $N(t)$ una variable aleatoria cuya distribución es una Poisson(λt). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea T_n una variable aleatoria absolutamente contínua que satisface:

$$T_n \leq t \iff N(t) \geq n\,.$$

Pruebe que,

$$F_{T_n}(t) \;=\; 1 - e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\,,$$

y concluya que T_n es una Gama e identifique sus parámetros.

SOLUCIÓN:

(i).- Dado que X e Y son variables aleatorias independientes se tiene que $\mathbb{P}(|X| \leq 1, Y \geq 2) = \mathbb{P}(|X| \leq 1)\,\mathbb{P}(Y \geq 2)$. Pero, como X e Y se distribuyen de acuerdo a una Normal(μ, σ^2) sabemos que $(X-\mu)/\sigma$ e $(Y-\mu)/\sigma$ se distribuyen de acuerdo a una Normal$(0,1)$. Luego, si $Z \sim$ Normal$(0,1)$, se tiene que

$$\mathbb{P}(|X| \leq 1) \;=\; \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X < -1) \;=\; \mathbb{P}(Z \leq 0) - \mathbb{P}(Z < -1) \;=\; \phi(0) - \phi(\text{-}1)\,,$$

y

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) \;=\; 1 - \mathbb{P}(Y < 2) \;=\; 1 - \mathbb{P}(Z < 1/2) \;=\; 1 - \phi(1/2)\,.$$

Observando que $\phi(\text{-}x) = 1 - \phi(x)$, se obtiene que $\phi(\text{-}1) = 1 - \phi(1)$. Resumiendo,

$$\mathbb{P}(|X| \leq 1, Y \geq 2) \;=\; (\phi(0) - 1 + \phi(1))(1 - \phi(1/2))\,.$$

De la tabla se obtiene que $\phi(0) = 0.5000$, $\phi(1) = 0.8413$, y $\phi(1/2) = 0.6915$ (ver valores en negrita en la tabla que se incluye en la proxima página). Evaluando, se concluye que $\mathbb{P}(|X| \leq 1, Y \geq 2) \approx 0.11$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	**0.5000**	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	**0.6915**	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	**0.8413**	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

(ii).- Observar que

$$F_{T_n}(t) \;=\; \mathbb{P}\left(T_n \leq t\right) \;=\; \mathbb{P}\left(N(t) \geq n\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(N(t) < n\right) \;,$$

donde la primera igualdad es por definición de función distribución, la segunda por definición de T_n, y la última por propiedad de $\mathbb{P}(\cdot)$. Pero $N(t)$ es una variable aleatoria de Poisson, por lo que su soporte es $\mathbb{N}$. Sigue que $N(t) < n$, sí y sólo si, $N(t) \in \{0, \ldots, n\text{-}1\}$. Luego,

$$F_{T_n}(t) \;=\; 1 - \sum_{m=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(N(t) = m\right) \;=\; 1 - \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \;=\; 1 - e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \,.$$

Para verificar que T_n es una Gama, debemos encontrar la función densidad $f_{T_n}(\cdot)$ de T_n y corroborar que corresponde a la función densidad de una Gama. Pero,

$$f_{T_n}(t) \;=\; \frac{d}{dt}F_{T_n}(t) \;=\; \lambda e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!} - e^{-\lambda t}\sum_{m=1}^{n-1}\lambda\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m\text{-}1)!} \;=\; \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n\text{-}1)!}\,.$$

Recordando que $\Gamma(n) = (n\text{-}1)!$ se concluye que $f_{T_n}(\cdot)$ corresponde a la función densidad de una Gamma de parámetros λ y n.

PROBLEMA 2:

(i).- Encuentre la función densidad de la variable aleatoria lognormal de parámetros (μ,σ^2), i.e. de la variable aleatoria $Y = e^Z$ donde Z es una variable aleatoria Normal(μ,σ^2).

(ii).- Se dice que el vector aleatorio (X,Y) es normal bivariado si la función densidad conjunta de X e Y es tal que $f_{X,Y}(x,y) =$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)\,.$$

- Pruebe que si $\rho = 0$ entonces X e Y son independientes.
- Pruebe que si $\mu_X = \mu_Y = 0$ y $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, entonces X es una Normal$(0,1)$.
  Indicación: Complete el cuadrado del binomio.

SOLUCIÓN:

(i).- Primero calcularemos la función distribución de Y y luego obtendremos su función densidad derivando. En efecto,

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}(Y\le t) \;=\; \mathbb{P}\left(e^Z\le t\right) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t\le 0,\\ \mathbb{P}(Z\le \ln(t)) & \text{si } t>0,\end{cases}$$

donde la primera igualdad es por definición de función distribución, la segunda por definición de Y, y la última porque $\ln(x)$ es la inversa de e^x. Derivando, se obtiene que

$$f_Y(t) \;=\; \frac{d}{dt}F_Y(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } t\le 0,\\ t^{-1}f_Z(\ln(t)) & \text{si } t>0.\end{cases}$$

Sigue que

$$f_Y(t) \;=\; 1\!\!1_{(0,\infty)}(t)\frac{t^{-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(t)-\mu)^2}\,.$$

(ii).-

• Sea $\rho = 0$. Para probar que X e Y son independientes bastará verificar que cualquiera sean $x,y\in\mathbb{R}$ se tiene que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. En efecto,

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x-\mu_X)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}e^{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}(y-\mu_Y)^2}\,.$$

Luego,

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x-\mu_X)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}(y-\mu_Y)^2} dy \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x-\mu_X)^2},$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho que el rango de integración y la función bajo la integral es el soporte y la función densidad respectivamente de una Normal(μ_Y, σ_Y^2), por lo que la integral es igual a 1. Análogamente,

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}(y-\mu_Y)^2}.$$

Luego, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ como se quería verificar.

- Por otro lado, si $\mu_X = \mu_Y = 0$ y $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, entonces

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi\sqrt{1\text{-}\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2}.$$

Luego,

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1\text{-}\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2} dy \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

donde la última igualdad se obtiene del hecho que el rango de integración y la función bajo la integral es el soporte y la función densidad respectivamente de una Normal$(\rho x, 1\text{-}\rho^2)$, por lo que la integral es igual a 1. Como $f_X(\cdot)$ corresponde a la función densidad de una Normal$(0,1)$ se tiene la conclusión deseada.

PROBLEMA 3:

(i).- Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X, Y \sim$ Geométrica(p). Pruebe que si $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m < n$, entonces $\mathbb{P}\left(\{X = m\} \,/\, \{X + Y = n\}\right) = 1/(n\text{-}1)$.

(ii).- Sea $a > 0$. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes distribuidas de acuerdo a una Uniforme$(0, a)$. Sean $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$ e $Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$.

- Calcule la función distribución de Y_1.
- Calcule la probabilidad que con tres segmentos de largo Y_1, $Y_2 - Y_1$, y $a - Y_2$ se pueda construir un triángulo. (Recordar que con tres segmentos de largo L_1, L_2, y L_3 se puede construir un triángulo, sí y sólo si, $L_1 \leq L_2 + L_3$, $L_2 \leq L_1 + L_3$, y $L_3 \leq L_1 + L_2$.)

  Indicación: Calcule el área de $C \subseteq [0,a] \times [0,a]$ tal que $(X_1, X_2) \in C$, sí y sólo si, con los tres segmentos de largo Y_1, $Y_2 - Y_1$, y $a - Y_2$ se puede construir un triángulo.

SOLUCIÓN:

(i).- Sea $q = 1 - p$. Recordar que por definición de probabilidad condicional

$$\mathbb{P}\left(X = m / X + Y = n\right) \;=\; \frac{\mathbb{P}\left(X = m, X + Y = n\right)}{\mathbb{P}\left(X + Y = n\right)}.$$

Pero,

$$\mathbb{P}(X = m, X + Y = n) \;=\; \mathbb{P}(X = m, Y = n - m) \;=\; \mathbb{P}(X = m)\,\mathbb{P}(Y = n - m) \;=\; q^{n-2}p^2\,,$$

donde la primera igualdad es obvia, la segunda se debe a que X e Y son independientes, y la última se tiene puesto que X e Y se distribuyen de acuerdo a una Geométrica(p).

Por otro lado,

$$\mathbb{P}(X + Y = n) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = i, X + Y = n) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} q^{n-2}p^2 \;=\; (n-1)q^{n-2}p^2\,,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de que el soporte de X e Y sea $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, y la segunda sigue de un análisis similar al utilizado para concluir que $\mathbb{P}(X = m, X + Y = n) = q^{n-2}p^2$.

De todo lo anterior, se obtiene que $\mathbb{P}(X = m / X + Y = n) = 1/(n-1)$.

(ii).-

- Observemos que como el soporte de X_1 y X_2 es $[0, a]$ entonces Y_1 nunca toma un valor menor que 0 y siempre toma un valor menor que a, i.e. $F_{Y_1}(t) = 0$ si $t < 0$ y $F_{Y_1}(t) = 1$ si $t > a$. Además, si $t \in [0, a]$, se tiene que

$$F_{Y_1}(t) \;=\; \mathbb{P}(Y_1 \leq t) \;=\; 1 - \mathbb{P}(Y_1 > t) \;=\; 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, X_2 > t) \;=\; 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)\,\mathbb{P}(X_2 > t)\,,$$

donde la primera igualdad es por definición de función distribución, la segunda es por propiedad de $\mathbb{P}(\cdot)$, la tercera por definición de Y_1, y la última por independencia de X_1 y X_2. Luego, dado que $X_1, X_2 \sim$ Uniforme$(0, a)$ se concluye que si $t \in [0, a]$, entonces

$$F_{Y_1}(t) \;=\; 1 - \left(\frac{a-t}{a}\right)^2.$$

- Para que se pueda formar un triángulo con los tres segmentos de largo $L_1 = Y_1$, $L_2 = Y_2 - Y_1$, y $L_3 = a - Y_2$, se debe tener que $L_1 \leq L_2 + L_3$, $L_2 \leq L_1 + L_3$, y $L_3 \leq L_1 + L_2$, i.e. $Y_1 \leq a - Y_1$, $Y_2 - Y_1 \leq a + Y_1 - Y_2$, y $a - Y_2 \leq Y_2$. Equivalentemente, $Y_1 \leq a/2$, $Y_2 - Y_1 \leq a/2$, y $a/2 \leq Y_2$.

Sea $C \subseteq [0, a] \times [0, a]$ tal que $(X_1, X_2) \in C$, sí y sólo si, $Y_1 \leq a/2$, $Y_2 - Y_1 \leq a/2$, $a/2 \leq Y_2$. Como (X_1, X_2) está uniformemente distribuido en $[0, a] \times [0, a]$ se tiene que la probabilidad deseada es

$$\frac{Area(C)}{a^2}\,.$$

En la Fig. 2.1 el conjunto C corresponde a la zona achurada cuyo área es $a^2/4$. De todo lo anterior se obtiene que la probabilidad pedida es $1/4$.

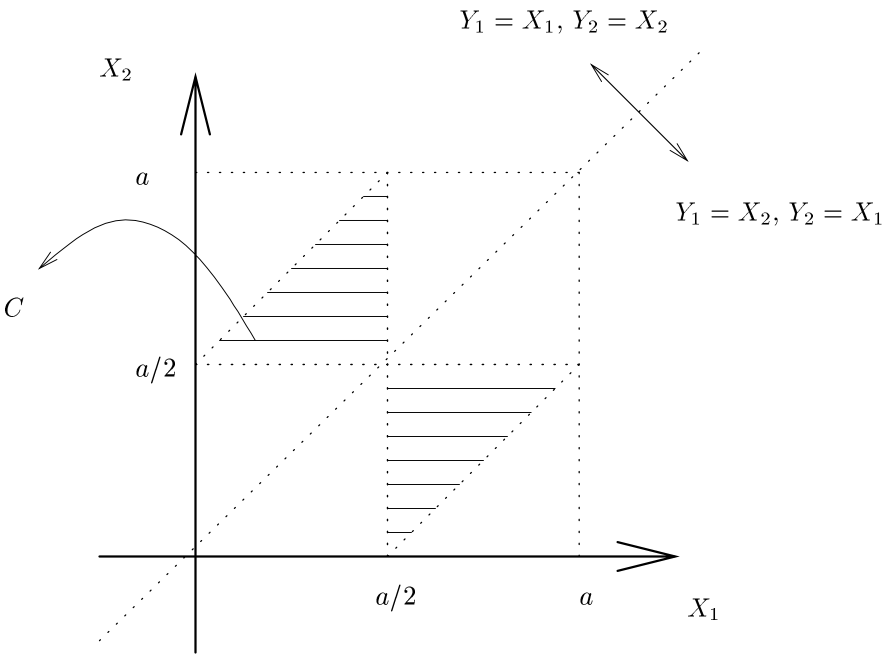

Figure 2.1: Conjunto C.