MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **31 de Agosto, 1998**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

Tiempo: 3.0 hrs.

Problema 1:

(i).- De un grupo de n personas se elige un comité de tamaño j de entre los cuales se elige un subcomité de tamaño $i \leq j$. Obtenga una igualdad combinatorial calculando, de dos formas distintas, el número de posibles elecciones de comités y subcomités.

(ii).- Un elevador parte del subterráneo de un edificio de N pisos con m personas y el operador del elevador. Las m personas se bajan en uno de los N pisos. ¿De cuantas formas distintas puede haber percibido el operador que las personas se bajaban del ascensor en los siguientes casos?

(ii-1).- si el operador no es capaz de percibir diferencias entre las personas,

(ii-2).- si m es un múltiplo de N, el operador sólo es capaz de distinguir entre hombres y mujeres, hay igual cantidad de hombres que de mujeres, la misma cantidad de personas se baja en cada piso, y en cada piso sólo se bajan hombres o sólo mujeres.

(iii).- Se realizan n lanzamientos independientes de una moneda que tiene probabilidad $p \in [0,1]$ de salir cara. De un modelo probabilista de la experiencia descrita y calcule la probabilidad de que se obtengan exactamente k caras en los n lanzamientos (indique claramente sus supuestos, el experimento, el espacio muestral y la medida de probabilidad).

Solución:

(i).- Si se eligen los comités primero, entonces hay $\binom{n}{i}$ formas de elegir los comités y de entre los i integrantes del comite hay $\binom{i}{j}$ formas de elegir los subcomités. Luego, el total de posibles comités y subcomités que se pueden formar son $\binom{n}{i}\binom{i}{j}$. Por otro lado, si se eligén los subcomités primero, entonces hay $\binom{n}{j}$ formas de elegir los sucomités. Cada subcomité se puede agrandar para formar un comité eligiendo los $i-j$ integrantes faltantes de entre las $n-j$ personas que no estan en el subcomité. Esto último se puede hacer de $\binom{n-j}{i-j}$ formas posibles. Luego, el total de posibles comités y subcomités que se pueden formar son $\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$. Como ambas cantidades corresponden a la cardinalidad del mismo conjunto sigue que son iguales, i.e.,

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}.$$

La anterior identidad combinatorial es facil de verificar algebraicamente.

(ii.1).- Si se interpretan los N pisos como N cajas distinguibles y las m personas como m bolas indistinguibles, entonces la pregunta es de cuantas formas se pueden distribuir m pelotas indistinguibles en N cajas disntinguibles. Por resultado visto, la respuesta es $\binom{N+m-1}{m}$ o lo que es lo mismo $\binom{N+m-1}{N-1}$.

(ii.2).- Como hay igual cantidad de mujeres que de hombres y en cada piso se bajan sólo mujeres o sólo hombres entonces en la mitad de los pisos se bajan hombres y en la otra mitad mujeres. Como los hombres y las mujeres son indistinguibles entre si, y como en cada piso se baja la misma cantidad de personas, lo único que el operador puede percibir es en que piso se bajan hombres/mujeres. Luego, el operador lo único que puede determinar es el subconjunto S de $\{1, \dots, N\}$ de cardinalidad $N/2$ correspondiente a los pisos en los que se bajaron mujeres. Por resultado visto, se concluye que hay $\binom{N}{N/2}$ distintas formas.

(iii).- Sea $\mathcal{E}_i$ el experimento que consiste en el lanzamiento de la moneda la i-ésima vez. Sea $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i))$, donde $\Omega_i = \{c, s\}$, su espacio medible asociado, dotado de la medida de probablidad $\mathbb{P}_i(\cdot)$ tal que $\mathbb{P}_i(\{c\}) = p$ y $\mathbb{P}_i(\{s\}) = 1 - p$.

Sea $\mathcal{E}$ el experimento que consiste en la realización de manera independiente de los experimentos $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, i.e., $\mathcal{E} = \times_{i=1}^n \mathcal{E}_i$. A dicho experimento le asociamos el espacio muestral y la medida de probabilidad canónica, i.e., $\Omega = \times_{i=1}^n \Omega_i$, y $\mathbb{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(A_i)$ si $A_i \in \mathcal{P}(\Omega_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Definamos ahora los siguientes eventos; A el evento que corresponde a "salen k caras", y si $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ sea A_S el evento que corresponde a "salen caras sólo en los lanzamientos i tal que $i \in S$". Notar que por independencia se tiene que $\mathbb{P}(A_S) = p^{|S|}(1-p)^{|S|}$. Observar además que A es la unión disjunta de los eventos A_S tales que $|S| = k$. Por aditividad finita, sigue que $\mathbb{P}(A)$ es igual a la suma de todos las $\mathbb{P}(A_S)$ tales que $|S| = k$. Como hay $\binom{n}{k}$ términos en dicha suma, y cada término es igual a $p^k(1-p)^k$ se tiene que

$$\mathbb{P}(A) \quad = \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^k .$$

PROBLEMA 2:

El profesor K se encuentra preocupado por la posibilidad de copia en los controles de su curso, por lo que ha contratado dos expertos ayudantes que denominaremos A_1 y A_2. Al comienzo del curso el profesor K divide a los estudiantes en dos grupos de igual tamaño, le asigna al azar uno de los ayudantes a cada grupo, y decide mantener dicha distribución durante todo el semestre.

Se sabe que en el curso hay un estudiante, que denominaremos X, el cual siempre copia y cuya identidad es desconocida por el despistado profesor K y sus ayudantes. Suponga que la probabilidad de que el ayudante A_j detecte que X copia durante un control es q_j, donde $q_1 = \frac{1}{3}$ y $q_2 = \frac{1}{9}$.[1] Asuma que la detección o no de una copia durante un control es independiente de un control a otro aun sabiendo que A_j cuida a X.

(i).- (1.5 pts.) Especifique un espacio muestral Ω para la situación descrita asumiendo que durante un semestre normal el profesor K toma un número finito de controles. El espacio muestral Ω debe ser tal que dado $\omega \in \Omega$ se pueda determinar que ayudante se le asigno a X y en que controles se detecto si X copio.

[1] En otras palabras A_1 es más "chacal".

(ii).- (2.0 pts.) Calcule la probabilidad que el estudiante X haya sido asignado al ayudante A_j, $j \in \{1, 2\}$, si se detecta su copia en el primer control.

(iii).- (2.5 pts.) Calcule la probabilidad de que si a X se le detecta copiando por primera vez el n-ésimo control entonces X haya sido asignado al ayudante A_j. ¿Como se comportan ambas probabilidades como función de n? Comente.

SOLUCIÓN:

(i).- Suponiendo que se toman m controles durante el semestre, elejimos como espacio muestral

$$\Omega = \{1,2\} \times \{exito, fracaso\}^m .$$

Decimos que el suceso elemental $\{(j, \vec{\omega})\} \subseteq \Omega$ ocurre, si el estudiante X fue asignado al ayudante j y durante el i-ésimo control se detecta a X copiando si y sólo si $\omega_i = exito$.

(ii).- Sea E_j el evento correspondiente a la afirmación: "el estudiante X fue asignado a A_j," $j \in \{1, 2\}$. Sea I_n, $n \in \{1, \ldots, m\}$, el evento correspondiente a la afirmación: "el n-ésimo control se detecta a X copiando."

Se pide calcular $\mathbb{P}(E_j/I_1)$, $j \in \{1, 2\}$. Por el Teorema de Bayes, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_j/I_1) &= \frac{\mathbb{P}(I_1/E_j)\,\mathbb{P}(E_j)}{\mathbb{P}(I_1/E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(I_1/E_2)\,\mathbb{P}(E_2)} \\ &= \frac{\frac{q_j}{2}}{\frac{1}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2} = \frac{q_j}{q_1 + q_2} . \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{P}(E_1/I_1) = \frac{3}{4}$ y $\mathbb{P}(E_2/I_1) = 1 - \mathbb{P}(E_1/I_1) = \frac{1}{4}$.

(iii).- Sea F_n el evento correspondiente a la afrimación "la primera vez que se detecta a X copiando es durante el n-ésimo control." Sigue que $F_n = (\bigcap_{l=1}^{n} I_l^c) \cap I_n$. Se pide caluclar $\mathbb{P}(E_j/F_n)$, $j \in \{1, 2\}$. Nuevamente por Bayes y puesto que $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = 1/2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_j/F_n) &= \frac{\mathbb{P}(F_n/E_j)\,\mathbb{P}(E_j)}{\mathbb{P}(F_n/E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(F_n/E_2)\,\mathbb{P}(E_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(F_n/E_j)}{\mathbb{P}(F_n/E_1) + \mathbb{P}(F_n/E_2)} . \end{aligned}$$

Pero, dado que $I_1, \ldots, I_m$ son enventos independientes, se tiene que,

$$\mathbb{P}(F_n/E_j) = \left(\prod_{l=1}^{n-1} \mathbb{P}(I_l^c/E_j) \right) \cdot \mathbb{P}(I_n/E_j) .$$

Luego, $\mathbb{P}(F_n/E_1) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ y $\mathbb{P}(F_n/E_2) = \frac{8^{n-1}}{9^n}$. Por lo tanto, $\mathbb{P}(E_1/F_n) = \frac{1}{1+4^{n-1}/3^n}$ y $\mathbb{P}(E_2/F_n) = \frac{1}{1+3^n/4^{n-1}}$.

Observar que $\mathbb{P}(E_1/F_n)$ es decreciente como función de n, y tiende a 0, pero $\mathbb{P}(E_2/F_n)$ es creciente como función de n y tiende a 1. Esto tiene sentido, puesto que mientras más controles pasen sin que se tetecte a X copiando es más probable que X le haya sido asignado al ayudante que es menos bueno para detectar copias.

PROBLEMA 3:

Un satélite de comunicaciones tiene n unidades emisoras que se ocupan de enviar informaciones codificadas a n decodificadores en tierra. El satélite esta programado para que el i-ésimo emisor envíe sus mensajes sólo al i-ésimo decodificador. Una vez lanzado el satélite se descubre que existe un desperfecto. Como consecuencia, cada emisor queda enviando todos sus mensajes a un sólo decodificador el cual fue elegido al azar entre los n posibles decodificadores.

i. (1.5 pts.) De un espacio de probabilidad que modele la situación descrita.

ii. (2.0 pts.) Se sabe que si un decodificador recibe mensajes provenientes de más de un emisor entonces se bloquea. Calcule la probabilidad de que ningún decodificador se bloquee.

iii. (2.5 pts.) Si el i-ésimo decodificador es el único capaz de descifrar los mensajes enviados por el i-ésimo emisor, calcule la probabilidad de que los mensajes provenientes de más de $k \in \{1, \ldots, n\}$ emisores puedan ser descifrados.

PROBLEMA 3: En lo que sigue, sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medíble dotado de la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

(i).- Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{F}$. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) \ ,$$

y concluya que si $\mathbb{P}(F_n) = 1$ para todo $n \geq 1$ entonces $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 1$.

<u>Indicación</u>: Estudie $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n)$.

(ii).- Pruebe que si $\mathbb{P}(A) = 1$ entonces para todo $B \in \mathcal{F}$ se tiene que A y B son independientes. Concluya que el mismo resultado se tiene en el caso que $\mathbb{P}(A) = 0$.

(iii).- Sean $E, F \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$. Se dice que el evento F acarrea información negativa acerca de E, denotado $F \downarrow E$, si

$$\mathbb{P}(E/F) \quad \leq \quad \mathbb{P}(E) \ .$$

Pruebe o de un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

(iii.1).- Si $F \downarrow E$ entonces $E \downarrow F$.

(iii.2).- Si $F \downarrow E$ y $E \downarrow G$ entonces $F \downarrow G$.

SOLUCIÓN:

(i).- Sea $F_m = \bigcup_{n=1}^{m} E_m$. Se tiene que $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y que $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente. Luego, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) =$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{m\to\infty} F_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(F_m) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n) \ ,$$

donde la primera igualdad se tiene por definición de límite de una sucesión creciente, la segunda por continuidad de $\mathbb{P}(\cdot)$, la tercera por defínción de F_m, y la desigualdad es una consecuencia de la desigualdad de Boole. Sigue que $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$. Luego, como $\mathbb{P}(F_n) = 1$ se concluye que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n^c) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(F_n)) = 1 .$$

(ii).- Supongamos que $\mathbb{P}(A) = 1$. Sique que

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB \cup A^c B) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(A^c B) = \mathbb{P}(AB) ,$$

donde la primera igualdad se tiene porque $\mathbb{P}(A) = 1$, la segunda porque $\{A, A^c\}$ es partición de Ω, la tercera por aditividad finita, y la última porque $\mathbb{P}(A^c B) \leq \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0$. Luego, por definición de eventos independientes, concluimos que A y B son independientes.

Por otro lado, si $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces, $\mathbb{P}(A^c) = 1$. Luego, del resultado recien demostrado, se concluye que A^c y B son independientes. Lo que implica, por resultado visto, que A y B son independientes.

(iii.1).- La afirmación es cierta. En efecto, supongamos que $F \downarrow E$. Sigue que

$$\mathbb{P}(F/E) = \frac{\mathbb{P}(E/F)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} \leq \frac{\mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} = \mathbb{P}(F) .$$

donde la primera igualdad es por definición de probabilidad condicional, la desigualdad se tiene puesto que $F \downarrow E$, y la segunda igualdad es obvia. Luego, $E \downarrow F$.

(iii.2).- La afirmación no es cierta. A continución describimos un contraejemplo. Sea $\mathcal{E}$ el experimento que consiste en lanzar dos dados. Sea $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ su espacio muestral dotado de la medida de probabilidad $\mathbb{P}(\cdot)$ que lo hace equiprobable. Sean además los siguientes eventos; F que corresponde a la afirmación "la suma de los dados es 12", E que corresponde a la afirmación "la suma de los dados es 2", y G que corresponde a la afirmación "sale al menos un 6." Observar que; (1) $\mathbb{P}(E/F) = 0$ y $\mathbb{P}(F) = 1/36$, i.e., $F \downarrow E$, (2) $\mathbb{P}(G/E) = 0$ y $\mathbb{P}(F) = 1/36$, i.e., $E \downarrow G$, (3) $\mathbb{P}(G/F) = 1$ y $\mathbb{P}(G) = 11/36$, i.e., no es cierto que $F \downarrow G$.