MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **30 de Octubre, 1998**

Esperanza, Varianza y Función Generatriz

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

A continuación se da la función generatriz de momentos, la esperanza, y la varianza de varias distribuciones importantes de v.a.'s.

Distribución	Función Generatriz	Esperanza	Varianza
Bernoulli(p)	$p\,e^t + 1 - p$	p	$p\,(1-p)$
Binomial(n,p)	$(p\,e^t + 1 - p)^n$	$n\,p$	$n\,p\,(1-p)$
Poisson(λ)	$e^{\lambda\,(e^t-1)}$	λ	λ
Geométrica(p)	$\dfrac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Pascal(r,p)	$\left(\dfrac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t}\right)^r$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{r\,(1-p)}{p^2}$
Uniforme(a,b)	$\dfrac{e^{t\,b}-e^{t\,a}}{t\,(b-a)}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponencial(λ)	$\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normal(μ,σ^2)	$\exp\left(\mu\,t+\dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$	μ	σ^2
Gama(λ,p)	$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^p$ si $t<\lambda$	$\dfrac{p}{\lambda}$	$\dfrac{p}{\lambda^2}$

Propiedades de la Esperanza, Varianza y Covarianza:

- Sea X una v.a. y $A \subseteq \mathbb{R}$. Sea $\mathbb{1}_A(X(\omega)) = 1$ si $X(\omega) \in A$, y $\mathbb{1}_A(X(\omega)) = 0$ si $X(\omega) \notin A$, entonces $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{P}\,(X \in A)$. Si X es tal que $\mathbb{P}\,(X \geq 0) = 1$, entonces, $\mathbf{E}(X) \geq 0$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y X, Y v.a.'s

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X) & \mathbf{Var}(X) &= \mathbf{Cov}(X,X) \\ \mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}(X\,Y) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) & \mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{Cov}(Y,X) \\ \mathbf{E}(a\,X+b) &= a\,\mathbf{E}(X)+b & \mathbf{Var}(a\,X+b) &= a^2\,\mathbf{Var}(X)\,. \end{aligned}$$

- Si X es v.a. entonces como $\mathbf{Var}(X) \geq 0$, se tiene que $\mathbf{E}(X^2) \geq \mathbf{E}^2(X)$.
- Sean $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_m$ v.a.'s

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) \\
\mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) \\
\mathbf{Cov}(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{Cov}(X_i, Y_j)\,.
\end{aligned}$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ v.a.'s. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(X_n \geq 0\right) = 1$, o $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$, entonces

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n)\,.$$

- Sean X, Y v.a.'s independientes con soportes S_X, S_Y respectivamente. Si además $g : S_X \to \mathbb{R}$ y $h : S_Y \to \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbf{E}(g(X)\,h(Y)) = \mathbf{E}(g(X))\,\mathbf{E}(h(Y))\,.$$

En particular, se tiene que si X, Y son v.a's independientes, entonces $\mathbf{E}(X\,Y) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$, y $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$. Luego, si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a.'s independientes

$$\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i)\,, \qquad \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}(X_i)\,.$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS:

- Sea X una variable aleatoria y $\phi_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\left(e^{t\,X}\right)$ su función generatriz de momentos. Si $\frac{d}{dt}\mathbf{E}\left(e^{t\,X}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{d}{dt}e^{t\,X}\right)$ entonces

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\phi_X(t)\right|_{t=0} = \mathbf{E}(X^n)\,, \qquad \forall\, n \geq 1\,.$$

- Sea X una v.a. y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\phi_{a\,X+b}(t) = e^{b\,t}\,\phi_X\left(a\,t\right)\,.$$

- Las v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ son independientes sí y sólo si

$$\mathbf{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t_i)\,, \qquad \forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\,.$$