| | |
|---|---|
| **MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos** | **27 de Noviembre, 1998** |

# Examen

*Prof. Cátedra: M. Kiwi* — *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1: Sea $g$:$[0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 \le g(x) \le 1$ cualquiera sea $x \in [0,1]$. Se quiere estimar

$$A \;=\; \int_0^1 g(x)dx\,.$$

El Método de Montecarlo para estimar $A$ consiste en elegir $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ al azar uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$ de manera independiente y estimar $A$ por

$$\widehat{A}_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\,,$$

donde $Z_i$ es la variable aleatoria que toma el valor 1 si $Y_i \le g(X_i)$ y 0 en caso contrario.

Un método alternativo para estimar $A$ consiste en elegir $X_1,\ldots,X_n$ al azar uniformemente distribuidas en el intervalo $[0,1]$ de manera independiente y estimar $A$ por

$$\widehat{\Lambda}_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\,.$$

(i).- Pruebe que $\mathbf{E}(\widehat{A}_n) = A$ y que $\mathbf{Var}(\widehat{A}_n) = A(1-A)/n$.

(ii).- Pruebe que $\mathbf{E}(\widehat{\Lambda}_n) = A$ y que $\mathbf{Var}(\widehat{\Lambda}_n) \le A(1-A)/n$.

(iii).- Pruebe que si $c > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\widehat{A}_n - A| > c\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\widehat{\Lambda}_n - A| > c\right) \;=\; 0.$

(iv).- Pruebe que con probabilidad al menos $39/40$ ambos métodos obtienen una estimación de $A$ con un error menor a $1/10$ cuando $n \ge 1000$.

PROBLEMA 2: Considere el siguiente juego entre $A$ y $B$:

(1) $A$ le paga $C$ pesos a $B$ por acceder a jugar.
(2) $A$ lanza un dado cuyo resultado $X$ se distribuye como una geométrica de parámetro $p \in ]0,1[$.[1]
(3) $B$ lanza el mismo dado lanzado por $A$ hasta obtener un valor estrictamente mayor que el valor obtenido por $A$. Si un lanzamiento de $B$ resulta en un valor menor o igual al obtenido por $A$, entonces $B$ le paga 1 peso a $A$ antes de volver a lanzar el dado.

(i).- Sea $Y_m$ el monto pagado por $B$ a $A$ cuando $A$ obtiene $m$ al lanzar el dado. Pruebe que

$$\mathbf{E}(Y_m) \;=\; \frac{1}{\mathbb{P}\,(X > m)} - 1 \;=\; \frac{1}{(1-p)^m} - 1\,.$$

[1] Observe que el dado es muy peculiar pues debe tener infinitas caras.

(ii).- Sea $Y$ el monto que $B$ le paga a $A$. Pruebe que $\mathbf{E}(Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{E}(Y_m)\mathbb{P}\,(X = m)$, y calcule $\mathbf{E}(Y)$.

(iii).- Suponga ahora que el resultado del dado ya no se distribuye como una geométrica, sino como una variable aleatoria absolutamente continua que sólo toma valores positivos y cuya función densidad $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua. Pruebe que para ningún valor de $C$ el juego es justo, es decir que para ningún valor de $C$ la ganancia esperada de cada jugador es 0.

Indicación: Sea $Y$ la variable aleatoria que representa el monto que $B$ le cancela a $A$. Sea $Y_x$ la variable aleatoria que representa el monto que $B$ le cancela a $A$ *cuando* $A$ obtiene $x$ al lanzar el dado. Utilice (sin demostrarlo) que $\mathbf{E}(Y) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(Y_x) f(x) dx$.

PROBLEMA 3: Sea $\rho \in \mathbb{R}$ y $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión infinita de variable aleatorias independientes con distribución normal de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Sea además

$$M = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n \leq \rho \text{ para todo } n > 0, \\ m & \text{si } m = \min\{n > 0 \,:\, X_n > \rho\}. \end{cases}$$

(i).- Pruebe que si $m > 0$, entonces $\mathbb{P}\,(M = 0) \leq \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\,(X_i \leq \rho)$. Concluya que $\mathbb{P}\,(M = 0) = 0$.

(ii).- Sea $Y$ la variable aleatoria definida por $Y = \begin{cases} \rho & \text{si } X_n \leq \rho \text{ para todo } n > 0, \\ X_m & \text{si } m = \min\{n > 0 \,:\, X_n > \rho\}. \end{cases}$

Pruebe que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que la función densidad de la variable aleatoria $Y$ es

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \rho, \\ (c/\sqrt{2\pi}\sigma) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} & \text{si } y \geq \rho. \end{cases}$$

Indicación: Pruebe primero que $\mathbb{P}\,(Y \leq t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\,(X_m \leq t, X_1 \leq \rho, \ldots, X_{m-1} \leq \rho, X_m > \rho)$.

(iii).- Pruebe que $c^{-1} = \int_{(\rho-\mu)/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ y que $\mathbf{E}(Y) = \mu + c\, \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\rho-\mu)^2}$.

(iv).- Es de público conocimiento que el proceso utilizado en Francia para la fabricación de los panes hace que su peso se distribuya (aproximadamente) de acuerdo a una normal cuya desviación standard es 50 grs. Una panadería francesa vende panes cuyo peso promedio es 950 grs pero asegura que sus panes pesan en promedio 1000 grs. Un cliente sospechando el engaño registra, durante un largo período, el peso del pan que compra cada mañana. Con los datos registrados por el cliente, ¿cómo puede este comprobar el engaño?

Acumulada suficiente evidencia acerca del engaño el cliente amenaza al panadero con demandarlo si no enmienda su actitud. Temeroso de una demanda pero deseoso de no reducir sus ganancias, el panadero cada mañana pesa sus panes hasta encontrar uno de más de 1000 grs y lo guarda aparte para entregárselo al mencionado cliente cuando este último se presenta en la panadería. Pasado un largo y apacible período el cliente interpone una demanda contra el panadero. ¿Cómo pudo el cliente determinar que el panadero seguía estafando a su clientela?