MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **9 de Noviembre, 1998**

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- Sean X e Y variables aleatorias idénticamente distribuidas y de varianza finita. Pruebe que $\mathbf{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$.

(ii).- Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes tales que $\mathbf{Var}(X_i) = 1$ para todo $i \in \{1,2,3\}$. Pruebe que $\rho(X_1+X_2, X_2+X_3) = 1/2$.

(iii).- Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes normalmente distribuidas de medias $\mu_1, \ldots, \mu_n$ y varianzas $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ respectivamente. Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ se distribuye como una normal de media $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$ y varianza $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2$.

Indicación: Puede utilizar que la función generadora de momentos de una normal de media μ y varianza σ^2 es $e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$.

(iv).- Sea X una variable aleatoria tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\phi(a) = \mathbf{E}((X-a)^2) \in \mathbb{R}$. Probar que $\phi(\cdot)$ se minimiza cuando $a = \mathbf{E}(X)$.

(v).- Sea X una variable aleatoria exponencial de parámetro λ, es decir, $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$, y 0 en caso contrario. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se define $\phi(a) = \mathbf{E}(|X-a|)$. Probar que $\phi(\cdot)$ se minimiza cuando $a = \lambda^{-1} \ln 2$.

PROBLEMA 2:

Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que X es una exponencial de parámetro λ e Y es una uniforme en el intervalo $]-\pi, \pi]$. Sean $U = \sqrt{X}\cos Y$ y $V = \sqrt{X} sen Y$.

(i).- (2.5 pts.) Use el método del Jacobiano para calcular la función densidad conjunta de U y V. Concluya que U y V son independientes y sus distribuciones son normales de media 0 y varianza $1/2\lambda$.

(ii).- (1.0 pts.) Pruebe que la función densidad de U^2 y V^2 es

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi t}} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

(iii).- (2.5 pts.) Observe que $U^2 + V^2 = X$. Luego, U^2+V^2 se distribuye como una exponencial de parámetro λ. Basandose en (ii) de una demostración alternativa de este mismo hecho.

Indicación: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}} dy = \pi.$

SIN CONSULTAS.