MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **2 de Julio, 1996**

Pauta Examen

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

PROBLEMA 1:

(i).- Si U, V son variables aleatorias independientes Normal$(0,1)$, se tiene que su densidad conjunta queda dada por:

$$f_{U,V}(u,v) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T\cdot\vec{u}}\,, \qquad \text{donde } \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, como $\vec{X} = \vec{g}(\vec{U}) = A\cdot\vec{U} + \vec{\mu}$ es una transformación invertible de $\vec{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ se tiene, usando el método del Jacobiano, que si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ entonces la densidad conjunta de $\vec{X}$ es:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{U,V}(g^{-1}(\vec{x}))\cdot\frac{1}{|\mathrm{Det}(J(g^{-1}(\vec{x})))|} \\ &= \frac{1}{2\,\pi\,|\mathrm{Det}(A)|}\cdot e^{-\frac{1}{2}(A^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}))^T(A^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}))} \\ &= \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{\mathrm{Det}(M)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T M^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}\,, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es consecuencia de que $g^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})$ y puesto que $J(g^{-1}(\vec{x})) = A$. La última igualdad es consecuencia del hecho que $(A^{-1})^T\cdot A = (A\cdot A^T)^{-1} = M^{-1}$ y $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A\cdot A^T) = \mathrm{Det}(A)\cdot\mathrm{Det}(A^T) = (\mathrm{Det}(A))^2$.

(ii).- Por linealidad del operador esperanza y dado que $\mathbb{E}\,(U) = \mathbb{E}\,(V) = 0$, sigue que $\mathbb{E}\,(X) = \mathbb{E}\,(A_{1,1}U + A_{1,2}V + \mu) = A_{1,1}\,\mathbb{E}\,(U) + A_{1,2}\,\mathbb{E}\,(V) + \mu = \mu$. Análogamente se deduce que $\mathbb{E}\,(Y) = \nu$.

La matriz pedida corresponde a la matriz de covarianza del vector aleatorio normal multivariado $\vec{X}$, esto es $M = A\cdot A^T$.

(iii).- Se tiene que

$$2\,s^2 + t^2 + \,2\,s\,t = \begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix},$$

i.e., si $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$f_{S,T}(s,t) = \frac{1}{2\,\pi}\,e^{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} s & t \end{pmatrix} M^{-1}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}}.$$

Entonces, $f_{S,T}(s,t)$ es una normal multivariada. Luego, S y T son normales. La esperanza de S es 0 y la de T es también 0, y sus varianzas son las que aparecen en la diagonal de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, i.e., $\mathbb{V}ar\,(S) = 1$ y $\mathbb{V}ar\,(T) = 2$. Luego, las marginales son

$$f_S(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}s^2}\,, \qquad f_T(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{1}{4}t^2}\,.$$

Como $f_S(s)\cdot f_T(t) \neq f_{S,T}(s,t)$, entonces S, T son dependientes.

PROBLEMA 2:

(i).- Observar que

$$\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) \;=\; \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{tj}p_i^j(1-p_i)^{n-j} \;=\; \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(e^tp_i)^j(1-p_i)^{n-j}\,.$$

Pero por el Teorema del Binomio esta última expresión es igual a $(p_ie^t+1-p_i)^n$.

(ii).- Aplicando la indicación se tiene que $X \geq (1+\delta)\mu$ sí y sólo si $e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}$. Luego,

$$\mathbb{P}\left(\{X \geq (1+\delta)\mu\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}\right\}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{\mathbb{E}\left(e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}}\,,$$

donde la desigualdad se obtiene observando que e^{tX} es una variable aleatoria no-negativa y aplicando la desigualdad de Markov, y la última igualdad es por independencia de $e^{tX_1},\ldots,e^{tX_n}$.

(iii).- Como $X_i \sim \text{Binomial}(n,p_i)$ se tiene que su esperanza es np_i. Luego, por la linealidad del operador esperanza,

$$\mu \;=\; \mathbb{E}\,(X) \;=\; \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,(X_i) \;=\; \sum_{i=1}^n np_i\,.$$

Por otro lado $\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) \leq e^{np_i(e^t-1)}$, luego

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) \;=\; e^{(e^t-1)\sum_{i=1}^n np_i} \;=\; e^{(e^t-1)\mu}\,.$$

La última igualdad y el punto anterior implican la desigualdad pedida.

PROBLEMA 3:

(i).- Por linealidad de la esperanza, $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) = \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$.

Por otro lado, $\mathbb{V}ar\left(\bar{X}_n\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}ar\,(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{n}$, donde la segunda igualdad es consecuencia del hecho que las variables aleatorias X_i son independientes.

(ii).- Como las variables aleatorias X_i son independientes idénticamente distribuidas y con esperanza y varianza finitas, se cumplen las hipótesis de la ley de los grandes números en su versión débil, luego

$\bar{X}_n$ converge en $\mathbb{P}$-probabilidad a μ, i.e., como $\mu = \mu_0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c\right) \;=\; 0\,,$$

cualquiera sea $c > 0$.

(iii).- Como los X_i son variables aleatorias independientes de esperanza μ y varianza σ^2 entonces $\bar{X}_n$ es una variable aleatoria normalmente distribuida de esperanza $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) = \mu$ y varianza $\mathbb{V}ar\left(\bar{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$. Luego, por propiedades de la distribución normal,

$$Z \;=\; \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \;\sim\; \text{Normal}(0,1)\,.$$

Luego,

$$\mathbb{P}\left(\left\{|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c\right\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{|Z| \geq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right\}\right) \;=\; 2\left(1 - \mathbb{P}\left(\left\{Z \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right\}\right)\right)\,.$$

Para determinar el c pedido, resolvemos la siguiente ecuación con incógnita c:

$$2\left(1 - \mathbb{P}\left(\left\{Z \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right\}\right)\right) \;=\; 0.1\,.$$

i.e., $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95$, luego de la indicación sigue que, $c\sqrt{n} = 1.64\,\sigma$. Concluimos que el valor pedido es $c = 1.64\sqrt{\frac{4}{100}} = 0.328$.

(iv).- Cuando n es suficientemente grande, podemos usar el mismo método que en el punto anterior puesto que sabemos, por el Teorema Central del Limite, que $\bar{X}_n$ sigue una distribución aproximadamente normal. La normalidad de la distribución de $\bar{X}_n$ era la componente clave del análisis del punto anterior.