MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**17 de Junio, 1996**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass — *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

Problema 1: Como $X^2 = X^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2) + X^2\,\mathbb{I}_{(-\infty,a^2)}(X^2)$, de la linealidad del operador de esperanza se concluye que

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \;=\; \mathbb{E}\left(X^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2)\right) + \mathbb{E}\left(X^2\,\mathbb{I}_{(-\infty,a^2)}(X^2)\right) .$$

Pero $X^2\,\mathbb{I}_{(-\infty,a^2)}(X^2)$ es una variable aleatoria no negativa, luego $\mathbb{E}\left(X^2\,\mathbb{I}_{(-\infty,a^2)}(X^2)\right) \geq 0$. Finalmente, como $X^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2) \geq a^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2)$ tenemos que

$$\mathbb{E}\left(X^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2)\right) \;\geq\; \mathbb{E}\left(a^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2)\right) \;=\; a^2\,\mathbb{P}\left(\left\{X^2 \geq a^2\right\}\right) .$$

La primera igualdad que dedujimos, combinada con las dos desigualdades obtenidas en el párrafo anterior permiten concluir que

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \;\geq\; a^2\,\mathbb{P}\left(\left\{X^2 \geq a^2\right\}\right) \;=\; a^2\,\mathbb{P}\left(\{|X| \geq a\}\right) .$$

Problema 2:

(i).- Calcularemos las marginales f_X, f_Y y verificaremos que $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$, lo que implica que X e Y no son independientes.

Primera forma: Por definición de densidad marginal,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+xy)}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2/\sqrt{3}}\right)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(y+\frac{x}{2})^2}\,dy . \end{aligned}$$

En la expresión anterior, la última integral es igual a 1 dado que corresponde a la integral de la función densidad de una Normal$(-\frac{x}{2},1)$ sobre su soporte. Luego, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2/\sqrt{3}}\right)^2} .$$

Por simetría se tiene que para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2/\sqrt{3}}\right)^2} .$$

Claramente $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$.

SEGUNDA FORMA: Basta notar que $f_{X,Y}$ corresponde a la función densidad de una normal bivariada de media $(\mu_X, \mu_Y)^T = (0,0)^T$ y matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\cdot\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\cdot\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que las coordenadas de un vector aleatorio bivariado con esperanza y matriz de covarianza como las anteriores, son normales con parámetros $\mu_X = 0$, $\sigma_X = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ se concluye que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{2/\sqrt{3}})^2}, \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{y}{2/\sqrt{3}})^2}.$$

Claramente $f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y$.

(ii).- Aplicaremos el método del Jacobiano. Sea

$$\vec{g}(X,Y) = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+Y \\ X \end{pmatrix}.$$

Obtendremos la función densidad de U como la marginal de la función densidad conjunta de U y V. Para determinar esta última densidad aplicaremos el método del Jacobiano.

Observemos que $X = V$, $Y = U - V$, y

$$J(x,y) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Luego,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v, u-v)|J(u,u-v)|^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(v^2+(u-v)^2+v(u-v))} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(v^2+u^2-u\,v)}.$$

La función densidad de U, la obtenemos como una de las marginales de $f_{U,V}$. En efecto,

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(v^2+u^2-uv)}\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(v^2+u^2+uv)}\,dv,$$

donde la última igualdad se obtiene mediante el cambio de variable $-v$ por v. Pero en la última expresión, el término de la derecha es idéntico (salvo cambio de variables) al que nos habíamos encontrado en la parte anterior de este mismo problema. Luego, de un cálculo similar se concluye que

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2/\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2/\sqrt{3}}\right)^2},$$

i.e., $U \sim \mathrm{Normal}(0, 4/3)$. Identificando parámetros sigue que $\mathbb{E}(U) = 0$ y $\mathbb{V}ar\,(U) = \frac{4}{3}$.

PROBLEMA 3: Observemos que $\mathbb{V}ar\,(Z-Y) = \mathbb{V}ar\,(Z) + \mathbb{V}ar\,(Y) - 2\,\mathbb{C}ov\,(Z,Y)$. Pero, por independencia de X y ϵ, $\mathbb{V}ar\,(Z) = \mathbb{V}ar\,(a\,X+\epsilon) = a^2\,\mathbb{V}ar\,(X) + \mathbb{V}ar\,(\epsilon)$, i.e., $\mathbb{V}ar\,(Z) = a^2\sigma_X^2 + 1$. Por otro lado, dado que la covarianza es una forma bilineal, $\mathbb{C}ov\,(Z,Y) = \mathbb{C}ov\,(a\,X+\epsilon,Y) = a\,\mathbb{C}ov\,(X,Y) + \mathbb{C}ov\,(\epsilon,Y)$, y como Y y ϵ son independientes $\mathbb{C}ov\,(\epsilon,Y)=0$, i.e., $\mathbb{C}ov\,(Z,Y) = a\rho\sigma_X\sigma_Y$. Luego, como la varianza de Y es σ_Y^2, concluimos que,

$$\mathbb{V}ar\,(Z-Y) \quad = \quad a^2\,\sigma_X^2 - 2a\rho\sigma_X\sigma_Y + 1 + \sigma_Y^2\,.$$

Derivando con respecto a la variable a, se comprueba que $\mathbb{V}ar\,(Z-Y)$ se minimiza cuando $2\,a\,\sigma_X^2 = 2\,\rho\,\sigma_X\,\sigma_Y$, i.e., cuando $a = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

Problema 4: Puesto que X e Y son independientes sabemos que la función densidad conjunta de $X+Y$, i.e., f_{X+Y}, es tal que

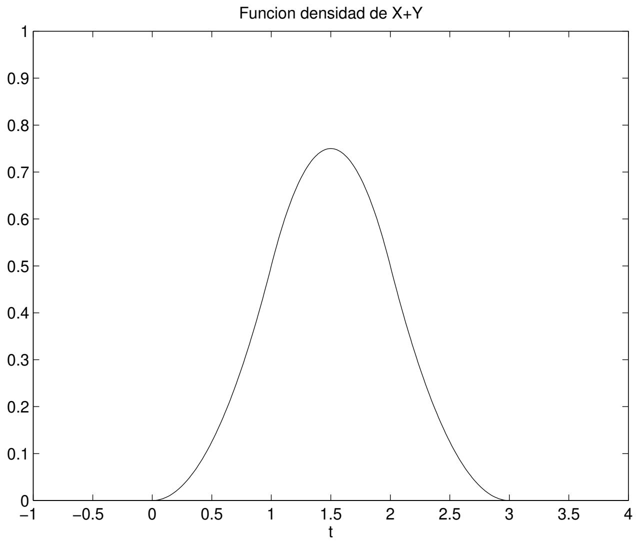
$$f_{X+Y}(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y)\,f_Y(y)\,dy \;=\; \int_{t-1}^{t} (t-y)\,f_Y(y)\,dy + \int_{t-2}^{t-1} (2-t+y)\,f_Y(y)\,dy\,.$$

Como el soporte de la variable aleatoria Y es $[0,1]$, sigue que,

$$f_{X+Y}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \text{ o } t \ge 3 \\ \displaystyle\int_0^t (t-y)\,dy & \text{si } 0 < t \le 1 \\ \displaystyle\int_{t-1}^1 (t-y)\,dy + \int_0^{t-1} (2-t+y)\,dy & \text{si } 1 < t \le 2 \\ \displaystyle\int_{t-2}^1 (2-t+y)\,dy & \text{si } 2 < t \le 3\,. \end{cases}$$

Luego,

$$f_{X+Y}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \text{ o } t \ge 3 \\ \frac{1}{2}\,t^2 & \text{si } 0 < t \le 1 \\ -\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} & \text{si } 1 < t \le 2 \\ \frac{1}{2}\,(3-t)^2 & \text{si } 2 < t \le 3\,. \end{cases}$$



La simetría de la función f_{X+Y} en torno a $\frac{3}{2}$ permite concluir que $\mathbb{E}(X+Y) = \frac{3}{2}$.

PROBLEMA 5: Sea $F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = \mathbb{P}\left(\left\{X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right\}\right)$.

(i).- De la regla de las probabilidades totales y observando que la probabilidad que X, Y, Z no sean todas distintas es 0, se concluye que $F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \;=$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\}) + \mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq z, Z \leq y, X \leq Z \leq Y\}) \\ &\quad + \ldots\ldots + \mathbb{P}(\{X \leq z, Y \leq y, Z \leq x, Z \leq Y \leq X\})\,.\end{aligned}$$

Por simetría se tiene que los seis términos a la derecha de la igualdad anterior son iguales. Luego,

$$F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \;=\; 6\,\mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\})\,.$$

(ii).- De la parte anterior tenemos que si $x \leq y \leq z$, entonces

$$F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \;=\; 6\int_0^x \left(\int_u^y \left(\int_v^z f_{X,Y,Z}(u,v,w)\,dw\right)\,dv\right)\,du\,.$$

Derivando parcialmente con respecto a x, y, z obtenemos que

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \;=\; 6\,f_{X,Y,Z}(x,y,z) \qquad \text{si } x \leq y \leq z\,.$$

Como X, Y, Z son variables aleatorias independientes Uniforme$(0,1)$ se tiene que

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) \;=\; f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x)\cdot\mathbb{I}_{[0,1]}(y)\cdot\mathbb{I}_{[0,1]}(z)\,.$$

Luego $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 6$, si $x \leq y \leq z$, $x, y, z \in [0,1]$.

(iii).- Si $x > y$ entonces $\mathbb{P}(\{X \leq x, Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\}) = \mathbb{P}(\{Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\})$. Luego, por la primera parte, concluimos que

$$F_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \;=\; 6\,\mathbb{P}(\{Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\})\,, \qquad \text{si } x > y\,.$$

Como la expresión de la derecha en la igualdad anterior no depende de x, al derivar parcialmente con respecto a x, y, z obtenemos que $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$ si $x > y$.

(iv).- De las partes anteriores y del enunciado del problema concluimos que

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \;=\; \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq y \leq z,\ x,y,z \in [0,1] \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Luego,

$$\mathbb{P}\left(\left\{X_{(1)} + d \leq X_{(2)}, X_{(2)} + d \leq X_{(3)}\right\}\right) \;=\; \int_0^{1-2d}\left(\int_{u+d}^{1-d}\left(\int_{v+d}^{1} 6\,dw\right)\,dv\right)\,du\,.$$

Calculando la triple integral se concluye que la probabilidad pedida es $(1-2d)^3$.