MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **21 de Mayo, 1996**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

Problema 1:

(i).- Observemos que:

1. Si $t < 1/2$ entonces $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X < 0\}) = 0$.
2. Si $t \in [1/2, 1)$ entonces $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = \mathbb{P}(\{X \leq t^*\})$, donde t^* es el único elemento $t \in \mathbb{R}$ tal que $F(t^*) = t$. Luego, $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = F(t^*) = t$.
3. Si $t \geq 1$, $\mathbb{P}(\{F(X) \leq t\}) = 1$.

(ii).- La matriz A es invertible si su determinante es no nulo, i.e.

$$0 \neq \operatorname{Det}(A) = \left(\prod_{i=1}^{n}(Y-i) + a\right) \cdot Y - a \cdot Y = \prod_{i=0}^{n}(Y-i)\,.$$

Como Y es una geométrica, entonces $Y > 0$. Así, $\operatorname{Det}(A)$ es cero sí y sólo si $Y = i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, y es invertible si $Y \in \{n+1, \ldots\}$. Luego, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y \in \{n+1, \ldots\}\}) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\{Y = i\}) \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \\
&= (1-p)^n\,.
\end{aligned}$$

Si Y es variable aleatoria absolutamente continua entonces $\mathbb{P}(\{Y \in \{n+1, \ldots\}\}) = 0$. Luego, la probabilidad que A sea invertible es 1.

Problema 2:

(i).- Como $f(t)$ es continua en $t \geq 0$, se tiene que $F(t)$ es diferenciable en $t > 0$, y $F'(t) = f(t)$, si $t > 0$. Luego

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt}(\ln(1 - F(t)))\,, \qquad t > 0\,.$$

Integrando, sigue que para alguna constante c se tiene que

$$F(t) = 1 - e^{-c} \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)\,.$$

Por otro lado, como X es variable aleatoria positiva, se tiene que $F(0) = 0$, luego $c = 0$. En resumen,

$$F(t) \;=\; 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right).$$

(ii.1).- La probabilidad pedida es,

$$\begin{aligned} p_N &= \mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_1 | T_N \geq t_0\}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_1, T_N \geq t_0\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_0\}\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_1\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{T_N \geq t_0\}\right)} = \frac{\exp(-\int_0^{t_1} \lambda_N(s)ds)}{\exp(-\int_0^{t_0} \lambda_N(s)ds)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_N \;=\; \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s)ds\right). \tag{1}$$

(ii.2).- Un argumento análogo al utilizado en la parte anterior muestra que

$$p_F \;=\; \exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_F(s)ds\right).$$

Luego, $2\lambda_N(t) = \lambda_F(t)$ si $t \geq 0$, implica que $p_F = p_N^2$. Por lo tanto, la razón ρ pedida es

$$\rho \;=\; \frac{1}{p_N}.$$

Tomando $t_0 = 50$, $t_1 = 60$ y $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ en (1), se concluye que $p_N = e^{-1/3}$. Luego, $\rho = e^{1/3}$.

PROBLEMA 3:

(i).- Por definición,

$$\mathbb{P}\left(\left\{T \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{x \in \Omega : T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}\right).$$

Pero,

$$T(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{2^n} x_{n-i-1} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}.$$

Por otro lado, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{2^n} x_{n-i-1} \notin \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ a menos que $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ correspondan a los n primeros bits en la descomposición binaria de k. Además, $\displaystyle\sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} \leq \frac{1}{2^n}$, donde la igualdad se verifica sí y sólo si $x_i = 1$ para todo $i \geq n$. Luego, $T(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ sí y sólo si $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_{n-i-1} = k$ y

$\sum_{i=n}^{\infty} 2^{i+1} x_i < \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(\left\{T \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

(ii).- Recordemos que $F(\frac{k}{2^n})$ es por definición igual a $\mathbb{P}\left(\left\{T \leq \frac{k}{2^n}\right\}\right)$, luego

$$\begin{aligned} F\left(\frac{k}{2^n}\right) &= \mathbb{P}\left(\{T < 0\}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(\left\{T \in \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{T = \frac{k}{2^n}\right\}\right) \\ &= 0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^n} + \mathbb{P}\left(\left\{T = \frac{k}{2^n}\right\}\right) \\ &= \frac{k}{2^n}. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad es consecuencia del hecho que la descomposición binaria de k es única, por lo que $\mathbb{P}\left(\left\{T = \frac{k}{2^n}\right\}\right) = 0$.

(iii).- Sea $t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}}$, $t_i \in \{0, 1\}$ (todo $t \in [0,1]$ se puede expresar de esta manera). Como $\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{N} \frac{2^i t_{N-i-1}}{2^{N+1}}$, del punto anterior sigue que

$$F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}}\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} \to t \quad \text{cuando} \quad N \to \infty.$$

Por otro lado, como $\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{2^i t_{N-i-1} + 1}{2^{N+1}}$, del punto anterior sigue que

$$F\left(\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right)\right) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) \quad \text{si} \quad \sum_{i=0}^{N} 2^i t_{i-N-1} < 2^{N+1} - 1.$$

Si $\sum_{i=0}^{N} 2^i t_{i-N-1} = 2^{N+1} - 1$ entonces $F\left(\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right)\right) = F(1) = 1$. Luego, en ambos casos se tiene que $F\left(\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right)\right) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right)$ lo que converge a t cuando $N \to \infty$. Hemos concluido que si $t \in [0,1]$, entonces

$$t = \lim_{N \to \infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}}\right) = \lim_{N \to \infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right)\right) = F(t),$$

Donde la última igualdad es consecuencia del hecho que F es continua por la derecha.

Notar que si $t < 0$, $F(t) = 0$. Si $t \geq 1$, $F(t) = 1$, pues $F(1) = 1$ y F es no decreciente y está acotada superiormente por 1. Luego $T \sim \text{Uniforme}(0,1)$.