MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**22 de Abril, 1996**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass — *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

Problema 1:

(i).- Probemos que $\mathcal{B}'$ satisface las condiciones necesarias para ser σ-álgebra.

- Dado que f es una función $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{B}$, luego $\Omega' \in \mathcal{B}'$.
- Si $A \in \mathcal{B}'$ entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ que es σ-álgebra, luego, $(f^{-1}(A))^c \in \mathcal{B}$. Pero, $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$. Lo que implica que $A^c \in \mathcal{B}'$.
- Finalmente, consideremos la colección de sucesos $A_i \in \mathcal{B}'$, $i \in \mathbb{N}$. Luego, dado que $\mathcal{B}$ es σ-álgebra, y que $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$, se tiene que $f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$. De donde se concluye que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}'$.

Por lo tanto $\mathcal{B}'$ es σ-álgebra.

(ii).- Probemos que $\mathbb{P}'$ satisface las condiciones necesarias para ser una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega', \mathcal{B}')$.

- Claramente $\mathbb{P}'(\Omega') = \mathbb{P}\left(f^{-1}(\Omega')\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Donde la primera igualdad es por definición, la segunda igualdad es consecuencia de que f es función, y la última es consecuencia de que $\mathbb{P}$ es medida de probabilidad.
- Sean, $A, B \in \mathcal{B}'$ conjuntos disjuntos. Entonces,

  $$\mathbb{P}'(A \cup B) \;=\; \mathbb{P}\left(f^{-1}(A \cup B)\right) \;=\; \mathbb{P}\left(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\right) \;.$$

  Pero, A, B disjuntos implica que $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ son disjuntos. Luego, como $\mathbb{P}$ es medida de probabilidad, se tiene que $\mathbb{P}'(A \cup B) = \mathbb{P}\left(f^{-1}(A)\right) + \mathbb{P}\left(f^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}'(A) + \mathbb{P}'(B)$.
- Sean, $A_i \in \mathcal{B}'$, $i \in \mathbb{N}$, conjuntos disjuntos. El mismo argumento de la parte anterior muestra que $\mathbb{P}'(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}'(A_i)$.

Por lo tanto, $\mathbb{P}'$ es medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega', \mathcal{B}')$.

(iii).- Bastará verificar que para cada $a, b \in [0, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'([0,a)) &= a \;, & (1)\\ \mathbb{P}'([0,b]) &= b \;. & (2) \end{aligned}$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'([a,1)) &= 1 - \mathbb{P}'([0,a)) \;=\; 1 - a \;, & (3)\\ \mathbb{P}'((b,1)) &= 1 - \mathbb{P}'([0,b]) \;=\; 1 - b \;. & (4) \end{aligned}$$

Luego, si $a \leq b$,

$$\begin{array}{rclcl}
\mathbb{P}'([a,b]) & = & \mathbb{P}'([0,b] \cap [a,1)) & = & \mathbb{P}'([0,b]) + \mathbb{P}'([a,1)) - \mathbb{P}'([0,b] \cup [a,1)) \\
\mathbb{P}'([a,b)) & = & \mathbb{P}'([0,b) \cap [a,1)) & = & \mathbb{P}'([0,b)) + \mathbb{P}'([a,1)) - \mathbb{P}'([0,b) \cup [a,1)) \\
\mathbb{P}'((a,b)) & = & \mathbb{P}'([0,b) \cap (a,1)) & = & \mathbb{P}'([0,b)) + \mathbb{P}'((a,1)) - \mathbb{P}'([0,b) \cup (a,1)) \\
\mathbb{P}'((a,b]) & = & \mathbb{P}'([0,b] \cap (a,1)) & = & \mathbb{P}'([0,b]) + \mathbb{P}'((a,1)) - \mathbb{P}'([0,b] \cup (a,1)).
\end{array}$$

En las anteriores identidades, el primer término en las expresiones de la derecha es b (por (1) y (2)), el segundo término es $1-a$ (por (3) y (4)), y el último término es 1. Luego todas las expresiones de la izquierda son iguales a $b-a$, como se quería demostrar.

Para probar (1) y (2), observar que $\mathbb{P}'([0,a)) = \mathbb{P}\left(f^{-1}([0,a))\right) = \mathbb{P}\left([0,\frac{a}{2}) \cup [\frac{1}{2},\frac{1+a}{2})\right) = \mathbb{P}\left([0,\frac{a}{2})\right) + \mathbb{P}\left([\frac{1}{2},\frac{1+a}{2})\right) = \frac{a}{2} + (\frac{1+a}{2} - \frac{1}{2}) = a = \mathbb{P}\left([0,a)\right)$, análogamente se concluye que $\mathbb{P}'([0,b]) = \mathbb{P}\left([0,b]\right)$.

Problema 2: Sean $\Omega_0 = \{1,2\}$ y $\Omega_1 = \{\, exito, fracaso \,\}$. Consideremos el espacio muestral

$$\Omega \quad = \quad \Omega_0 \times \Omega_1^{\mathbb{N}^*} .$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Luego, decimos que el suceso elemental $\{(r,\vec{\omega})\} \subseteq \Omega$ ocurre, si los malhechores están en la región r y el resultado del rastreo en el i-ésimo día es ω_i.

Como los espacios muestrales Ω_0 son finitos, los dotamos de las σ-álgebras $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ de las partes de Ω_0 y Ω_1 respectivamente. Luego, al espacio muestral Ω, le asociamos la σ-álgebra producto $\mathcal{F}_0 \otimes \left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_1\right)$. Denotamos por $\mathbb{P}$ a la medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$ que satisface las condiciones descritas en el enunciado.

Sea R_i, $i \in \{1,2\}$, el evento correspondiente a la afirmación: "los malhechores se encuentran en la región i". Sea I_n, $n \in \mathbb{N}^*$, el evento correspondiente a la afirmación: "el n-ésimo día se intercepta la comunicación de los malhechores". Sea E_n el evento correspondiente a la afirmación: "la primera intercepción de la comunicación de los malhechores ocurre el n-ésimo día", i.e., $E_n = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} I_j^c\right) \cap I_n$.

(i).- Se pide calcular $\mathbb{P}(R_i/I_1)$, $i \in \{1,2\}$. Por el Teorema de Bayes, se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(R_i/I_1) & = & \dfrac{\mathbb{P}(I_1/R_i)\,\mathbb{P}(R_i)}{\mathbb{P}(I_1/R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(I_1/R_2)\,\mathbb{P}(R_2)} \\
& = & \dfrac{\frac{p_i}{2}}{\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2} \;=\; \dfrac{p_i}{p_1+p_2} .
\end{array}$$

Luego, $\mathbb{P}(R_1/I_1) = \frac{2}{3}$ y $\mathbb{P}(R_2/I_1) = 1 - \mathbb{P}(R_1/I_1) = \frac{1}{3}$.

(ii).- Se pide calcular $\mathbb{P}(R_i/E_n)$, $i \in \{1,2\}$. Nuevamente, por Bayes y dado que $\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(R_i/E_n) & = & \dfrac{\mathbb{P}(E_n/R_i)\,\mathbb{P}(R_i)}{\mathbb{P}(E_n/R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(E_n/R_2)\,\mathbb{P}(R_2)} \\
& = & \dfrac{\mathbb{P}(E_n/R_i)}{\mathbb{P}(E_n/R_1) + \mathbb{P}(E_n/R_2)} .
\end{array}$$

Pero, dado que al condicionar en R_i la familia de eventos $\{I_n \,:\, n \in \mathbb{N}^*\}$ es independiente,

$$\mathbb{P}(E_n/R_i) \quad = \quad \left(\prod_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(I_j^c/R_i\right)\right) \cdot \mathbb{P}(I_n) .$$

Luego, $\mathbb{P}\left(E_n/R_1\right) = \frac{1}{2^n}$ y $\mathbb{P}\left(E_n/R_2\right) = \frac{3^{n-1}}{4^n}$. Por lo tanto, $\mathbb{P}\left(R_1/E_n\right) = \frac{2^n}{2^n+3^{n-1}}$ y $\mathbb{P}\left(R_2/E_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(R_1/E_n\right) = \frac{3^{n-1}}{2^n+3^{n-1}}$.

Evaluando para $n = 2$ y $n = 3$ vemos que $\mathbb{P}\left(R_1/E_2\right) = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}\left(R_2/E_2\right) = \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}\left(R_1/E_3\right) = \frac{8}{17} < \frac{1}{2}$, y $\mathbb{P}\left(R_2/E_3\right) = \frac{9}{17} > \frac{1}{2}$. Observar que $\mathbb{P}\left(R_1/E_n\right)$ es decreciente como función de n. Luego, la policía debe concentrar sus esfuerzos de búsqueda en la primera región sólo si la primera intercepción ocurre en uno de los dos primeros días.

(iii).- Sea $R_i^{(j)}$ el evento correspondiente a la afirmación: "los malhechores se encuentran en la región i al comienzo del j-ésimo día". Se pide calcular $\mathbb{P}\left(R_1^{(3)}\right)$ y $\mathbb{P}\left(R_2^{(3)}\right)$.

Primero observamos que $\mathbb{P}\left(R_1^{(1)}\right) = \mathbb{P}\left(R_1\right) = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}\left(R_2^{(1)}\right) = \mathbb{P}\left(R_2\right) = \frac{1}{2}$. Por la regla de las probabilidades totales,

$$\mathbb{P}\left(R_1^{(j)}\right) \quad = \quad (1-q_1)\mathbb{P}\left(R_1^{(j-1)}\right) + q_2\mathbb{P}\left(R_2^{(j-1)}\right) \ ,$$

De donde se deduce que $\mathbb{P}\left(R_1^{(2)}\right) = \frac{3}{8}$ y $\mathbb{P}\left(R_2^{(2)}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(R_1^{(2)}\right) = \frac{5}{8}$. Luego, se tiene que $\mathbb{P}\left(R_1^{(3)}\right) = \frac{11}{32}$ y $\mathbb{P}\left(R_2^{(3)}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(R_1^{(3)}\right) = \frac{21}{32}$.

Problema 3:

(i).- Sea $E = \{1, \ldots, n\}$ la colección de emisores, y $D = \{1, \ldots, n\}$ la colección de decodificadores. Consideramos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es la colección de funciones $f : E \to D$, es decir, la colección de los posibles patrones de interconección entre emisores y decodificadores. Dado que Ω es un espacio muestral finito, elegimos $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Finalmente, puesto que todos los patrones de interconección son igualmente probables, definimos $\mathbb{P}\left(\{f\}\right) = \frac{1}{|\Omega|}$, lo que determina completamente la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

(ii).- Si el patrón de interconección entre emisores y decodificadores esta dado por $f : E \to D$, entonces, ningún decodificador queda bloqueado si y solo si f es una función biyectiva (i.e., una permutación de $\{1, \ldots, n\}$). Luego, si $\beta \subseteq \Omega$ es el conjunto de funciones biyectivas de E en D, entonces, la probabilidad pedida es $|\beta|/|\Omega|$.

Si $f \in \Omega$ entonces para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(i)$ puede ser cualquiera de n valores. Luego del principio generalizado del conteo se deduce que $|\Omega| = n^n$. El número de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$ es $n!$, luego $|\beta| = n!$.

Por lo tanto, la probabilidad de que ningún decodificador se bloquee es $n!/n^n$.

(iii).- Sea $\Pi_j \subseteq \Omega$ la colección de funciones de E en D con exactamente j puntos fijos. Observar que los conjuntos Π_j son disjuntos. La probabilidad de que los mensajes provenientes de a lo más k emisores puedan ser descifrados es

$$\frac{1}{|\Omega|}\left|\bigcup_{j=0}^{k} \Pi_j\right| \quad = \quad \frac{1}{|\Omega|}\sum_{j=0}^{k} |\Pi_j| \, .$$

Del punto anterior sabemos que $|\Omega| = n^n$.

Sea $\Pi_I \subseteq \Omega$, donde $I \subseteq \{ 1, \ldots, n \}$, la colección de funciones cuyos únicos puntos fijos están dados por la familia de índices I. Si $f \in \Pi_I$ entonces $f(i) = i$ si $i \in I$, y si $i \notin I$ entonces $f(i)$ puede ser cualquiera de $n-1$ valores ($f(i) \in \{ 1, \ldots, n \} \setminus \{ i \}$), luego del principio generalizado del conteo se deduce que $|\Pi_I| = (n-1)^{n-|I|}$. Por otro lado,

$$\Pi_j = \bigcup_{I \subseteq \{ 1, \ldots, n \} : |I| = j} \Pi_I \ ,$$

y como $I \neq I'$ implica que Π_I y $\Pi_{I'}$ son disjuntos, se concluye que

$$|\Pi_j| = \binom{n}{j} (n-1)^{n-j} \ .$$

Luego, la probabilidad de que los mensajes provenientes de más de k emisores puedan ser decodificados es

$$1 - \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n} \right)^{j} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-j} \ .$$