**MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos** **11 de Junio, 1996**

# 1 .– Esperanza, Varianza y Función Generatriz

*Prof. Cátedras: M. Kiwi, A. Maass* *Prof. Auxiliar: D. Hojman, P.P. Romagnoli*

A continuación se da la función generatriz de momentos, la esperanza, y la varianza de varias distribuciones importantes de v.a.'s.

| Distribución | Función Generatriz | Esperanza | Varianza |
|---|---|---|---|
| $Bernoulli(p)$ | $p\,e^t + 1 - p$ | $p$ | $p\,(1-p)$ |
| $Binomial(n,p)$ | $(p\,e^t + 1 - p)^n$ | $n\,p$ | $n\,p\,(1-p)$ |
| $Poisson(\lambda)$ | $e^{\lambda\,(e^t-1)}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| $Geométrica(p)$ | $\dfrac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t}$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{1-p}{p^2}$ |
| $Pascal\,(r,p)$ | $\left(\dfrac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t}\right)^r$ | $\dfrac{r}{p}$ | $\dfrac{r\,(1-p)}{p^2}$ |
| $Uniforme(a,b)$ | $\dfrac{e^{t\,b} - e^{t\,a}}{t\,(b-a)}$ | $\dfrac{a+b}{2}$ | $\dfrac{(b-a)^2}{12}$ |
| $Exponencial\,(\lambda)$ | $\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ | $\dfrac{1}{\lambda}$ | $\dfrac{1}{\lambda^2}$ |
| $Normal(\mu,\sigma)$ | $\exp\left\{\mu\,t + \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$ | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| $Gama(\lambda,p)$ | $\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^p$ si $t < \lambda$ | $\dfrac{p}{\lambda}$ | $\dfrac{p}{\lambda^2}$ |

Propiedades de la Esperanza, Varianza y Covarianza:

- Sea $X$ una v.a. y $A \subseteq I\!R$, si $\mathbf{I}_{\{X\in A\}}(\omega) = 1$ si $X(\omega) \in A$, y $\mathbf{I}_{\{X\in A\}}(\omega) = 0$ si $X(\omega) \notin A$, entonces $\mathbf{E}(\mathbf{I}_{\{X\in A\}}) = I\!P_X(A) = I\!P(X \in A)$. Si $X$ es tal que $I\!P(X \geq 0) = 1$, entonces, $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

- Sean $a, b \in I\!R$, y $X, Y$ v.a.'s

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X) & \qquad \mathbf{V}(X) &= \mathbf{Cov}(X,X) \\ \mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}(X\,Y) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) & \qquad \mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{Cov}(Y,X) \\ \mathbf{E}(a\,X+b) &= a\,\mathbf{E}(X) + b & \qquad \mathbf{V}(a\,X+b) &= a^2\,\mathbf{V}(X)\,. \end{aligned}$$

- Si $X$ es v.a. entonces como $\mathbf{V}(X) \geq 0$, se tiene que $\mathbf{E}(X^2) \geq \mathbf{E}^2(X)$.

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_m$ v.a.'s

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) \\ \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) \\ \mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \, , \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{Cov}(X_i, Y_j) \, . \end{aligned}$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ v.a.'s. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n \geq 0) = 1$, o $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$, entonces

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n) \, .$$

- Sean $X, Y$ v.a.'s independientes con soportes $S_X, S_Y$ respectivamente. Si además $g : S_X \to \mathbb{R}$ y $h : S_Y \to \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbf{E}(g(X)\, h(Y)) = \mathbf{E}(g(X))\, \mathbf{E}(h(Y)) \, .$$

En particular, se tiene que si $X, Y$ son v.a's independientes, entonces $\mathbf{E}(X\, Y) = \mathbf{E}(X)\, \mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$, y $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$, luego, si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a.'s independientes

$$\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) \, , \qquad \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) \, .$$

Propiedades de la Función Generatriz de Momentos:

- Sea $X$ una variable aletoria y $\phi_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\left(e^{t\, X}\right)$ su función generatriz de momentos. Si $\frac{d}{dt}\mathbf{E}\left(e^{t\, X}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{d}{dt} e^{t\, X}\right)$ entonces

$$\left.\frac{d^n}{dt^n}\phi_X(t)\right|_{t=0} = \mathbf{E}(X^n) \, , \qquad \forall\, n \geq 1 \, .$$

- Sea $X$ una v.a. y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\phi_{a\, X + b}(t) = e^{b\, t}\, \phi_X(a\, t) \, .$$

- Las v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ son independientes si y sólo si

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i\right\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t_i) \, , \qquad \forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \, .$$