MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **2 de Julio, 1996**

Examen

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

TIEMPO: 3.5 HRS.

PROBLEMA 1: Sean U, V variables aleatorias independientes Normal$(0,1)$. Se define el vector aleatorio

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \vec{\mu} ,$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz invertible real y $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(i).- (2.5 pts.) Probar que si $M = AA^T$, entonces la densidad conjunta del vector $\vec{X}$ es

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det} M}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T M^{-1} (\vec{x}-\vec{\mu})} , \qquad \text{donde } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

<u>Nota</u>: La densidad de una variable aleatoria Normal$(0,1)$ es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

(ii).- (1.5 pts.) Identifique o calcule $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, y $\begin{pmatrix} \mathbb{V}ar\,(X) & \mathbb{C}ov\,(X,Y) \\ \mathbb{C}ov\,(X,Y) & \mathbb{V}ar\,(Y) \end{pmatrix}$.

(iii).- (2.0 pts.) Suponga que el vector aleatorio $\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$ tiene densidad conjunta

$$f_{S,T}(s,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(2s^2+t^2+2st)} .$$

Determinar las marginales $f_S(s)$ y $f_T(t)$. ¿Son las variables S y T independientes?

PROBLEMA 2: Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim$ Binomial(n, p_i), i.e., $\mathbb{P}(\{X_i = k\}) = \binom{n}{k} p_i^k (1-p_i)^{n-k}$, para $k = 0, \ldots, n$. En este problema probaremos que si $\delta > 0$, $X = \sum_{i=1}^n X_i$, y $\mu = \mathbb{E}(X)$ entonces

$$\mathbb{P}(\{X \geq (1+\delta)\mu\}) \leq \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} , \qquad \forall\, t \geq 0 . \qquad (*)$$

(i).- (2.0 pts.) Pruebe que la función generadora de momentos de X_i es

$$\phi_{X_i}(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) = \left(1 + p_i\left(e^t - 1\right)\right)^n .$$

Luego, como $1 + x \leq e^x$ sigue que $\phi_{X_i}(t) \leq e^{np_i(e^t-1)}$.

(ii).- (2.0 pts.) Pruebe que para todo $t \geq 0$ se tiene,

$$\mathbb{P}(\{X \geq (1+\delta)\mu\}) \leq \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right)}{e^{t(1+\delta)\mu}} .$$

Indicación: Observe que si $t \geq 0$, entonces $a \geq b$ sí y sólo si $e^{ta} \geq e^{tb}$.

(iii).- (2.0 pts.) Concluya la desigualdad (*).

PROBLEMA 3: Sean $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza μ desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$. Se define $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. En este problema queremos diseñar una estrategia para confirmar o rechazar la hipótesis de que la esperanza de estas variables es μ_0 (un valor real conocido).

(i).- (1.5 pts.) Calcular $\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right)$ en función de μ, y $\mathbb{V}ar\left(\bar{X}_n\right)$.

(ii).- (1.5 pts.) Si $\mu = \mu_0$ y $c > 0$, justifique que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left\{|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c\right\}\right) = 0$.

(iii).- (2.0 pts.) Suponga en este punto que las variables X_i son normales, que $n = 100$, y que $\mu = \mu_0$. Encontrar el menor valor $c > 0$ tal que

$$\mathbb{P}\left(\left\{|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c\right\}\right) \quad \leq \quad 0.1$$

Nota: $Z \sim \text{Normal}(0,1)$ entonces $\mathbb{P}\left(\{Z \leq 1.64\}\right) = 0.95$

(iv).- (1.0 pts.) Uno rechaza la hipótesis que $\mu = \mu_0$ con probabilidad 0.1 cuando $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$. Proponga un método para confirmar o rechazar la hipótesis $\mu = \mu_0$ cuando las variables aleatorias X_i no son necesariamente normales como en el punto anterior. Justifique.

SIN CONSULTAS.