MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	**17 de Junio, 1996**

Control No. 3

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass — *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

TIEMPO: 3.0

La nota final de este control se calcula como el promedio de las 4 mejores preguntas.

PROBLEMA 1: Sea X una variable aleatoria. Pruebe que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, entonces

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \quad \geq \quad a^2\,\mathbb{P}\left(\{|X| \geq a\}\right) .$$

Indicación: Descomponga $X^2 = X^2\,\mathbb{I}_{[a^2,+\infty)}(X^2) + X^2\,\mathbb{I}_{(-\infty,a^2)}(X^2)$.

PROBLEMA 2: Sean X e Y variables aleatorias absolutamente continuas cuya densidad conjunta esta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{4\,\pi}\cdot e^{-(x^2+y^2+xy)/2} .$$

(i).- (3.0 pts.) Pruebe que X e Y no son independientes.

(ii).- (3.0 pts.) Calcular la densidad de $U = X+Y$. Identifique sus parámetros, i.e., $\mathbb{E}\,(U)$ y $\mathbb{V}ar\,(U)$.

Indicación: Calcular la distribución de U como la marginal de una transformación apropiada de X e Y.

PROBLEMA 3: Sean X, Y, ϵ variables aleatorias donde ϵ es una Normal$(0,1)$ independiente de X e Y. Se define la variable aleatoria $Z = a\,X + \epsilon$, donde $a \in \mathbb{R}$. Asuma que las varianzas de X e Y son σ_X^2 y σ_Y^2 respectivamente, y que la covarianza de X e Y es $(\rho\sigma_X\sigma_Y)$. Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ que minimiza la varianza de $Z - Y$.

PROBLEMA 4: Sea X una variable aleatoria absolutamente continua de densidad

$$f_X(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \leq 2 \\ 0 & 2 < t\,. \end{cases}$$

Sea Y una variable aleatoria Uniforme$(0,1)$ independiente de X. Calcular y graficar la función densidad de $X+Y$. Determine $\mathbb{E}\,(X+Y)$.

PROBLEMA 5: A lo largo de un camino de 1 kilómetros hay tres teléfonos de emergencia que fueron distribuidos al azar a lo largo de la ruta. Se quiere determinar la probabilidad de que no existan dos teléfonos a una distancia entre ellos menor que d kilómetros, donde $d \in [0,1]$. Para ello, considere las tres variables aleatorias independientes X, Y, Z con distribución Uniforme$(0,1)$. Denote las variables aleatorias $\min\{X,Y,Z\}$, mediana$\{X,Y,Z\}$, $\max\{X,Y,Z\}$ como $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ respectivamente.

(i).- (1.5 pts.) Probar que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(\left\{X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right\}\right) \quad = \quad 6\,\mathbb{P}\left(\{X \leq x, Y \leq y, Z \leq z, X \leq Y \leq Z\}\right).$$

(ii).- (2.0 pts.) Probar que si $x \leq y \leq z$, $x, y, z \in [0,1]$, entonces

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) \quad = \quad 6\,.$$

(iii).- (1.0 pts.) Verifique que cuando $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x > y$ entonces $\mathbb{P}\left(\left\{X_{(1)} \leq x, X_{(2)} \leq y, X_{(3)} \leq z\right\}\right)$ no depende de x, luego $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$. Cálculos similares permiten concluir (no lo pruebe) que si no se cumple que $x \leq y \leq z$ entonces $f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x,y,z) = 0$.

(iv).- (1.5 pts.) Calcule $\mathbb{P}\left(\left\{X_{(1)} + d \leq X_{(2)}, X_{(2)} + d \leq X_{(3)}\right\}\right)$ para determinar la probabilidad buscada.

SIN CONSULTAS.