MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	20 de Mayo, 1996

Control No. 2

Prof. Cátedra: Farias, Kiwi, y Maass — *Prof. Auxiliar: Hojman, Risco, y Romagnoli*

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1:

(i).- (3.0 pts.) Considere una variable aleatoria X cuya función de distribución está dada por

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0\,, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Calcular la distribución de la variable aleatoria $F(X)$.

(ii).- (3.0 pts.) Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A \quad = \quad \begin{bmatrix} \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(Y-i)+a & a \cdot Y \\ 1 & Y \end{bmatrix}.$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim$ Geomtrica(p). Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una variables aleatoria absolutamente continua.

PROBLEMA 2: Sea $X : (\Omega, \beta, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ una variable aleatoria absolutamente continua positiva (i.e., $X \geq 0$), F su función distribución y f su función de densidad. Suponga además que $F(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y que f es continua en $\mathbb{R}_+$. Se define la 'tasa de falla' de la variable X a través de la ecuación

$$\lambda(t) \quad = \quad \frac{f(t)}{1-F(t)}\,,$$

donde $t \geq 0$.

(i).- (1.5 pts.) Probar que $\lambda(t)$ determina la función de distribución F. Para ello pruebe que si $t \geq 0$,

$$F(t) \quad = \quad 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right)\,.$$

(ii).- En un estudio reciente se afirma que la tasa de muerte de los fumadores es el doble que la de los no fumadores. ¿Como entender ésto en términos de la probabilidad de sobrevivencia?; veremos que no significa que un fumador viva (en promedio) la mitad que un no fumador.

Si suponemos que el tiempo de vida de un no fumador es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_N y el tiempo de vida de un fumador también es una variable aleatoria absolutamente continua positiva T_F, donde $F_{T_N}(t) \neq 1, F_{T_F}(t) \neq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y sus funciones de densidad son continuas en $\mathbb{R}_+$, entonces la comparación de dichas tasas corresponde a:

$$2\lambda_N(t) \quad = \quad \lambda_F(t)\,, \qquad \forall t \geq 0\,.$$

(ii.1).- (2.5 pts.) Sean $0 \leq t_0 < t_1$. Probar que la probabilidad que un no fumador de al menos t_0 años alcance la edad de t_1 años está dada por:

$$\exp\left(-\int_{t_0}^{t_1} \lambda_N(s)ds\right) .$$

(ii.2).- (2.0 pts.) Suponga que $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}$ para todo $t \geq 0$. Calcular la razón entre la probabilidad que un no fumador de al menos 50 años cumpla 60 años con respecto a la misma probabilidad para un fumador.

PROBLEMA 3: Sea $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{P}$ la probabilidad producto, donde $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Se define la variable aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$T((x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}} .$$

Se quiere calcular la distribución de T que denotamos F.

(i).- (1.5 pts.) Calcular $\mathbb{P}\left(\left\{T \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}\right)$ para $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

(ii).- (1.5 pts.) Calcular $F(\frac{k}{2^n})$ para $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

(iii).- (3.0 pts.) Pruebe que si $t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{2^{i+1}}$, $t_i \in \{0,1\}$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}}\right) = \lim_{N\to\infty} F\left(\sum_{i=0}^{N} \frac{t_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^{N+1}}\right) ,$$

e identifique la distribución F.

SIN CONSULTAS.