Capitulo V:

V.1 Propiedades Básicas de la Esperanza y Varianza

Problema V.1.1

Calcule $S_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdots \ldots \cdots (k-i) r^{k-i-1}$ *con* $0 < r < 1$ $i \in \mathbb{N}$

Solución:

Encontraremos una recurrencia para S_i.

Caso $(i = 0)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dr}(r^k) = \frac{d}{dr}(\sum_{k=1}^{\infty} r^k) = \frac{d}{dr}(\frac{1}{1-r} - 1) = \frac{1}{(1-r)^2}$$

$(i \Rightarrow i+1)$

$$\sum_{k=i+2}^{\infty} k(k-1)...(k-i)(k-i-1)r^{k-i-2} = \sum_{k=i+2}^{\infty} k(k-1)...(k-i)\frac{d}{dr}(r^{k-i-1}) \Rightarrow$$

$$S_{i+1} = \frac{d}{dr}(S_i - k(k-1)...(k-i)) = \frac{d}{dr}(S_i)$$

Por lo tanto

$$S_{i+1} = \frac{d}{dr} S_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{i+1} = \frac{d^i}{dr^i}(\frac{1}{1-r})$$

Podemos suponer que $S_i = \frac{a_i}{(1-r)^{i+2}}$ con $a_0 = 1$ para algunos a_i aun por determinar. Al aplicar la recurrencia se obtiene:

$$\frac{a_{i+1}}{(1-r)^{i+3}} = \frac{d}{dr}(\frac{a_i}{(1-r)^{i+2}}) \Rightarrow a_{i+1} = (i+2)a_i = (i+2)(i+1)...2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow S_{i+1} = \frac{(i+2)!}{(1-r)^{i+3}}$$

En general tendremos que:

$$S_i = \frac{(i+1)!}{(1-r)^{i+2}} \quad \forall i \in I\!N$$

Observación: Este no es un problema de probabilidades. Sin embargo, el resultado de estas sumatorias se utiliza normalmente en el cálculo de esperanzas y momentos de orden superior de muchas variables aleatorias comúnmente utilizadas.

Problema V.1.2

Sean X, Y variables aleatorias con varianza finita, pruebe que:

$$Si\ V(X) \neq V(Y) \Rightarrow X+Y, X-Y\, no\ son\ independientes$$

Solución:

Lo que vamos a probar es que:

$$V(X) \neq V(Y) \Rightarrow I\!E(X+Y)(X-Y)) \neq I\!E((X+Y)I\!E(X-Y)$$

Desarrollando un poco tendremos que:

$$I\!E((X+Y)(X-Y)) = I\!E(X^2-Y^2) = I\!E(X^2) - I\!E(Y^2)$$

Es bien sabido que: $V(X) = I\!E(X^2) - I\!E(X)^2$ y $V(Y) = I\!E(Y^2) - I\!E(Y)^2$

Al despejar $I\!E(X^2)$ y $I\!E(Y^2)$ de las ecuaciones anteriores y reemplazar probamos que:

$$I\!E((X+Y)(X-Y)) = V(X) + I\!E(X)^2 - V(Y) - I\!E(Y)^2 = V(X) - V(Y) +$$
$$(I\!E(X) + I\!E(Y))(I\!E(X) - I\!E(Y))$$
$$\Rightarrow I\!E((X+Y)(X-Y)) - I\!E(X+Y)I\!E(X-Y) = V(X) - V(Y) \neq 0.$$

Un resultado conocido asegura que si dos variables aleatorias A,B son independientes entonces $I\!E(A \cdot B) = I\!E(A)I\!E(B)$. Por lo tanto que estas dos cantidades difieran prueba que no son independientes.

Este resultado se puede escribir de una manera mas positiva, es decir ¿ Qué ocurre si las variables $X+Y$ y $X-Y$ son independientes ?.

Problema V.1.3

Sean X, Y variables aleatorias a valores en $\{0,1\}$. Muestre que:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Leftrightarrow X, Y \textit{ son independientes}$$

Solución:

Por definición:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1)$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) = (0 \cdot 1)\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + (1 \cdot 0)\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + (0 \cdot 0)\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \\ + (1 \cdot 1)\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \Rightarrow \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \quad (1)$.

Utilizando (1) probaremos que:

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) \quad \forall i, j \in \{0,1\}$$

Esto es una condición necesaria y suficiente para que X e Y sean independientes, debido a que solo toman valores en $\{0,1\}$.
Al calcular las marginales de X e Y:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$$
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$$

Despejando y utilizando (1) se obtiene:

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)(1 - \mathbb{P}(Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \qquad (2)$$

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)(1 - \mathbb{P}(X = 1)) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) \qquad (3)$$

Solo falta un término pero:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1, Y = 0)$$

Al aplicar $(1), (2), (3)$:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)(\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 0))$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)(1 - \mathbb{P}(Y = 1)) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$$

Observación: ¿Qué ocurre si X toma valores a, b e Y toma valores c, d? ¿Cuál condición es la que asegura independencia entre X e Y?

Problema V.1.4

Sean X, Y variables aleatorias con varianzas finitas. Pruebe que:

$$V(XY) = V(X)V(Y) + \mathbb{E}(X^2)V(X) + \mathbb{E}(Y^2)V(X)$$

Cuando X, Y son independientes

Solución:

$V(XY) = \mathbb{E}(XY^2) - \mathbb{E}(XY)^2$.
Si X e Y son independientes $\Rightarrow X^2$ e Y^2 son independientes

$$\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \qquad \mathbb{E}(X^2Y^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

Por lo tanto $V(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2 \qquad (1)$

Además al usar: $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$\Rightarrow V(X)V(Y) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) + \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X)^2$$

$$\Rightarrow V(X)V(Y) = \mathbb{E}(X)^2\left[\mathbb{E}(Y)^2 - \mathbb{E}(Y^2)\right] + \mathbb{E}(Y)^2\left[\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X^2)\right]$$

Lo que nos permite concluir que $V(XY) - V(X)V(Y) = \mathbb{E}(X)^2V(Y) + \mathbb{E}(Y)^2V(X)$.

La definición de $V(X)$ para X variable aleatoria es en general:

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Pero con un poco de desarrollo:

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2$$

Al aplicar esperanza a la igualdad anterior:

$$\Rightarrow V(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Siempre recordando que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X)] = \mathbb{E}(X)$ $\forall X$ variable aleatoria.

Problema V.1.5

Sea $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias con varianzas finitas tales que:

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \qquad \forall i \neq j \in \{1, ..., n\}$$

Calcule $V(\sum_{i=1}^{k} X_i) \quad \forall k \in \{1, ..., n\}$

Solución:

Probaremos por inducción que $V(\sum_{i=1}^{k} X_i) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) \quad \forall k \in \{1, ..., n\}$
(Caso $n = 2$)
Por definición:

$$V(X_1 + X_2) = \mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)^2\right] - \mathbb{E}(X_1 + X_2)^2$$

Desarrollando el cuadrado:

$$\mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)^2\right] = \mathbb{E}(X_1^2) + \mathbb{E}(X_2^2) + 2\mathbb{E}(X_1 X_2)$$

Aplicando la hipótesis con $i = 1$ y $j = 2$:

$$\mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)^2\right] = \mathbb{E}(X_1^2) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2^2)$$

Además:

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2)^2 = [\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)]^2 = \mathbb{E}(X_1)^2 + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2)^2$$

Restando se obtiene:

$$V(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 + \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = V(X_1) + V(X_2)$$

($k \Rightarrow k + 1$) Es evidente que:

$$V\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}\right) \quad (1)$$

Veamos que $\mathbb{E}\left[X_{k+1}(\sum_{i=1}^{k} X_i)\right] = \mathbb{E}(X_{k+1}) \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)$ lo que nos permite usar la hipótesis de inducción con $k = 2$ en (1) para las variables $\sum_{i=1}^{k} X_i$ y X_{k+1}.

En efecto al aplicar la hipótesis con $j = k+1$ se obtiene:

$$I\!E\left[X_{k+1}(\sum_{i=1}^{k} X_i)\right] = I\!E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i X_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} I\!E(X_i X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} I\!E(X_i)\cdot I\!E(X_{k+1})$$

Por lo tanto, como la esperanza es lineal:

$$I\!E\left[X_{k+1}(\sum_{i=1}^{k} X_i)\right] = I\!E(X_{k+1})\cdot \sum_{i=1}^{k} I\!E(X_i) = I\!E(X_{k+1})\cdot I\!E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)$$

Aplicando la inducción con $k=2$ probamos que:

$$V\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + V(X_{k+1})$$

$$\Rightarrow V\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} V(X_i)$$

Observación: La hipótesis inicial es equivalente a $COV(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i \neq j$. Este resultado prueba en particular que $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ cuando los X_i son independientes. En palabras se ha probado que la varianza de la suma es la suma de las varianzas cuando las covarianzas son nulas. ¿ Será cierta la recíproca ?.

Problema V.1.6

Sean $X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n$ variables aleatorias tales que:

$$\begin{aligned} V(X_i) &= 1 \quad \forall i \in \{1,...,m\} \qquad V(Y_j) = 1 \quad \forall j \in \{1,...,n\} \\ \rho(X_i, Y_j) &= \rho_3 \quad \forall i \in \{1,...,m\} \quad \forall j \in \{1,...,n\} \\ \rho(X_i, X_j) &= \rho_1 \quad \forall i,j \in \{1,...,m\} \\ \rho(Y_i, Y_j) &= \rho_2 \quad \forall i,j \in \{1,...,n\} \end{aligned}$$

Sean $U = \sum_{i=1}^{m} X_i$ y $W = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ muestre que:

$$\rho(U, W) = \frac{\sqrt{mn}\rho_3}{\sqrt{1+(m-1)\rho_1}\sqrt{1+(n-1)\rho_2}}$$

Solución:

Recordemos que $\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$

Con $COV(X,Y) = I\!E\left[(X - I\!E(X))(Y - I\!E(Y))\right]$

Que se denominan coeficiente de correlación y covarianza respectivamente.

Como la covarianza es bilineal tendremos que:

$$COV(U,W) = COV\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} COV(X_i,Y_j) = m \cdot n \cdot \rho_3$$

Al calcular ahora la varianza de U obtenemos:

$$\begin{aligned} V(U) = V\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) &= V\left(X_1 + \sum_{i=2}^{m} X_i\right) \\ &= V(X_1) + V\left(\sum_{i=2}^{m} X_i\right) - 2COV\left(X_1, \sum_{i=2}^{m} X_i\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(U) = V\left(\sum_{i=2}^{m} X_i\right) + 1 - 2\sum_{i=2}^{m} COV(X_1,X_i) = V\left(\sum_{i=2}^{m} X_i\right) + 1 - 2(m-1)\rho_1$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) &= 1 - 2(m-1)\rho_1 + V\left(\sum_{i=2}^{m} X_i\right) \\ &= 1 - 2(m-1)\rho_1 + 1 - 2(m-2)\rho_1 + V\left(\sum_{i=3}^{m} X_i\right) \end{aligned}$$

Iterando esta recurrencia se obtiene:

$$V(U) = m - 2\rho_1 \sum_{i=1}^{m}(m-i) = m - 2\rho_1 \frac{m(m-1)}{2} = m[1 - (m-1)\rho_1]$$

Al utilizar el mismo razonamiento con W se tiene que:

$$V(W) = n[1 - (n-1)\rho_2]$$

Al reemplazar todos los resultados en la fórmula de la correlación:

$$\rho(U,W) = \frac{mn\rho_3}{\sqrt{mn}\sqrt{1-(n-1)\rho_2}\sqrt{1-(m-1)\rho_1}} = \frac{\sqrt{mn}\rho_3}{\sqrt{1-(n-1)\rho_2}\sqrt{1-(m-1)\rho_1}}$$

Observación: Lo único que se necesita para resolver el problema anterior es conocer las propiedades básicas de la esperanza y la varianza, ya que todas las demás propiedades se deducen directamente de ellas.

Problema V.1.7

Sea X una v.a. tal que $E(X^2) < +\infty$, demostrar que:
(a) X tiene esperanza y varianza finita.
(b) $(\forall \varepsilon > 0) : P[|X - E(X)| > \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Solución:

(a) Para demostrar que X tiene esperanza es necesario y suficiente demostrar que $|X|$ tiene esperanza.
En efecto, como $(\forall t \in I\!R) : |t| \leq 1 + t^2$ obtenemos que:

$$|X| \leq 1 + X^2$$

de donde como $E(1) = 1 < +\infty$ y $E(X^2) < +\infty$ concluimos que:

$$0 \leq E(|X|) \leq E(1 + X^2) = E(1) + E(X^2) < +\infty$$

i.e. $|X|$ tiene esperanza finita .Para verificar que también X tiene varianza finita, basta notar que:

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X) \cdot X + [E(X)]^2$$

luego como $0 \leq E(X^2) < +\infty$ y $-\infty < E(X) < +\infty$, concluimos que:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2 - 2E(X) \cdot X + [E(X)]^2] \\ &= E(X^2) - E(2E(X) \cdot X) + E([E(X)]^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto $V(X) < +\infty$. Como por otro lado siempre $V(X) \geq 0$ concluimos que X tiene varianza finita.

(b) En efecto, denotando por $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio probabilístico donde se encuentra definida X es claro que

$$A_\varepsilon := \{\omega \in \Omega : |X(\omega) - E(X)| > \varepsilon\}$$

es un conjunto medible i.e. $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$. Claramente

$$(\forall \omega \in A_\varepsilon) : \quad \varepsilon \leq |X(\omega) - E(X)|$$

y

$$(\forall \omega \notin A_\varepsilon) : \quad 0 \leq |X(\omega) - E(X)|$$

Luego

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \varepsilon 1_{A_\varepsilon}(\omega) \leq |X(\omega) - E(X)|$$

y por lo tanto

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \varepsilon^2 1_{A_\varepsilon}(\omega) \leq |X(\omega) - E(X)|^2$$

De la monotonía y linealidad de la esperanza, obtenemos que:

$$\varepsilon^2 E(1_{A_\varepsilon}) \leq E(|X - E(X)|^2) = V(X)$$

i.e.

$$P(A_\varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

o equivalentemente

$$P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

lo que demuestra (b).

Problema V.1.8

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico e $Y, X_1, ..., X_n$ v.a. de esperanza y varianza finita. Considere el problema

$$(P) \qquad \min_{s.a.} \qquad V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i)$$
$$(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I\!R^n$$

Se pide que:

(a) *Demuestre que si* $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$ *es solución de* (P) *entonces el vector* $(\alpha_0^{**}, ..., \alpha_n^{**})$ *donde* $\alpha_0^{**} := E(Y - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^* X_i)$ *y* $(\forall i = 1, ..., n) : \alpha_i^{**} := \alpha_i^*$ *es solución de*

$$
\begin{array}{lll}
(P^*) & \min\limits_{s.a.} & V(Y - \alpha_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) \\
& (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in I\!\!R^{n+1} & \\
& E(\alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) = E(Y) &
\end{array}
$$

(b) *Demuestre que si la matriz* $A := [cov(X_i, X_j)]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *es definida positiva entonces* (P^*) *tiene solución.*

Solución:

(a) En efecto si $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*) \in I\!\!R^n$ es solución de (P) entonces

$$
(\forall (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I\!\!R^n) : \quad V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* X_i) \leq V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) \tag{1}
$$

pero

$$
V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* X_i) = V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) = V(Y - \alpha_0^{**} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i)
$$

luego de (1) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
(\forall (\alpha_0, ..., \alpha_n) \in I\!\!R^{n+1}) : \quad V(Y - \alpha_0^{**} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) &\leq V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) \\
&= V(Y - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Para concluir que $(\alpha_0^{**}, ..., \alpha_n^{**})$ es solución de (P^*) basta verificar que $(\alpha_0^{**}, ..., \alpha_n^{**})$ satisface las restricciones de (P^*), lo que es directo pues

$$
\begin{aligned}
E(\alpha_0^{**} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) = {} & \alpha_0^{**} + E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) = E(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) + E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) \\
= {} & E(Y) - E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) + E(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{**} X_i) = E(Y)
\end{aligned}
$$

(b) Basta demostrar que si A es definida positiva, entonces el problema (P) tiene solución, lo que por (a) nos permitirá concluir que (P^*) tiene solución.

En efecto, dado $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I\!R^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} V(Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) &= V(Y) + V(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) - 2cov(Y, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) \\ &= V(Y) + cov(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i cov(Y, X_i) \\ &= V(Y) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i cov(Y, X_i) \end{aligned}$$

luego (P) se escribe de manera equivalente como

$$\begin{array}{lll} (P_1) & \min\limits_{s.a.} & V(Y) + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i cov(Y, X_i) \\ & (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I\!R^n & \end{array}$$

que a su vez es equivalente al problema

$$\begin{array}{lll} (P_2) & \min\limits_{s.a.} & \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i cov(Y, X_i) \\ & (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I\!R^n & \end{array}$$

Al definir entonces el vector $b^T := [cov(Y, X_i), ..., cov(Y, X_n)]$ vemos que (P_2) se reescribe como

$$\begin{array}{lll} (P_2) & \min\limits_{s.a.} & \frac{1}{2}\alpha^T A \alpha - b^T \alpha \\ & \alpha \in I\!R^n & \end{array}$$

De la equivalencia entre los problemas $(P), (P_1)$ y (P_2) bastará demostrar que (P_2) tiene solución si A es d.p .
En efecto como la función $f : I\!R^n \to I\!R$ definida por $f(\alpha) := \frac{1}{2}\alpha^T A\alpha - b^T\alpha$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en $I\!R^n$ y $(\forall \alpha \in I\!R^n) : H_f(\alpha) = A$ es d.p. , concluimos que f es una función convexa luego

$$\alpha^* \text{ es mínimo de } f \text{ si y solo si } \nabla f(\alpha^*) = 0$$

lo que a su vez es equivalente a

$$A\alpha^* = b$$

Vemos así que para que (P_2) tenga solución es suficiente que la ecuación $A\alpha^* = b$ también tenga, lo que es directo pues la matriz A es d.p., y por lo tanto invertible.

Así hemos demostrado que (P_2) tiene solución y por lo tanto de las equivalencias mostradas, junto con lo hecho en (a) concluimos que (P^*) tiene solución.

Antes de terminar notemos que la matriz $A \in I\!R^{n\times n}$ siempre es s.d.p. .En efecto, dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I\!R^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha^T A_\alpha &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} cov(X_i, \alpha_j X_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i cov(X_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} cov(\alpha_i X_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_j X_j) = cov(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j) = V(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i) \geq 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto $(\forall \alpha \in I\!R^n) : \alpha^T A \alpha \geq 0$, es decir, A es matriz s.d.p .

Problema V.1.9

(a) Sean $a_1, ..., a_n \in I\!R$ y $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes tales que

$$(\forall i = 1, ..., n) : E(X_i) = \mu \ , \ V(X_i) = \sigma^2 < +\infty$$

Determine $E(U), V(U)$ donde U es la v.a. definida por $U := \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

(b) Sean $\{a_{ij} : i = 1, ..., n \ , \ j = 1, ..., n\} \subset I\!R$ y $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes tales que

$$(\forall i = 1, ..., n) : E(X_i) = 0 \ , \ V(X_i) = \sigma^2 < +\infty \ , \ E(X_i^4) = \tau^4 < +\infty$$

Determine $E(Z), V(Z)$ donde Z es la v.a definida por $Z := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j$.

Solución:

(a) De la linealidad de la esperanza obtenemos que:

$$E(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu = \mu(\sum_{i=1}^{n} a_i)$$

Además

$$\begin{aligned}
V(U) = cov(U, U) &= cov(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j) = \sum_{i=1}^{n} cov(a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i cov(X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j cov(X_i, X_j)
\end{aligned} \tag{a1}$$

Dado que $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes se tiene que si $i \neq j$ entonces $cov(X_i, X_j) = 0$, luego de (a1) obtenemos que:

$$V(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 cov(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) = \sigma^2 (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

(b) Del hecho que $X_1, ..., X_n$ son v.a. independientes de esperanza finita sale que si $i \neq j$ entonces $E(X_i \cdot X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j) = 0$, luego

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E(X_i X_j) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} a_{ij} E(X_i X_j) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} E(X_i X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E(X_i^2) \end{aligned} \tag{b1}$$

Dado $i \in \{1, ..., n\}$ como X es v.a con esperanza entonces $V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2$ y por lo tanto $E(X_i^2) = \sigma^2$, de donde por (b1) obtenemos que:

$$E(Z) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right)$$

Por otro lado, como Z es v.a con esperanza se tiene que $V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$. Pero

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E[(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j) \cdot (\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} X_p X_q)] = E[\sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{ij} a_{pq} X_i X_j X_p X_q] \\ &= \sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{ij} a_{pq} E(X_i X_j X_p X_q) = \sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}|=1}}^{n} a_{ij} a_{pq} E(X_i X_j X_p X_q) \\ &+ \sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}|=2}}^{n} a_{ij} a_{pq} E(X_i X_j X_p X_q) + \sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}| \geq 3}}^{n} a_{ij} a_{pq} E(X_i X_j X_p X_q) \end{aligned} \tag{b2}$$

Dados $i, j, p, q \in \{1, ..., n\}$ se tiene que:

(b3) $|\{i, j, p, q\}| = 1 \Rightarrow E(X_i X_j X_p X_q) = \tau^4$
(b4) $|\{i, j, p, q\}| = 2 \Rightarrow E(X_i X_j X_p X_q) = \sigma^4$
(b5) $|\{i, j, p, q\}| \geq 3 \Rightarrow E(X_i X_j X_p X_q) = 0$

En efecto, si $|\{i, j, p, q\}| = 1 \Rightarrow i = j = p = q$ luego $E(X_i X_j X_p X_q) = E(X_i^4) = \tau^4$, lo que demuestra (b3). Si $|\{i, j, p, q\}| = 2$ entonces $\exists k, r \in \{1, ..., n\}$ tales que $k \neq r$

e $\{i,j,p,q\} = \{k,r\}$ luego $E(X_iX_jX_pX_q) = E(X_k^2X_r^2)$, como $k \neq r$ y X_k, X_r son v.a independientes entonces $E(X_iX_jX_pX_q) = E(X_k^2)E(X_r^2) = \sigma^2 \cdot \sigma^2 = \sigma^4$, lo que prueba (b4). Si $|\{i,j,p,q\}| \geq 3$ entonces al menos uno de los índices i,j,p,q es distinto de los otros tres; no hay pérdida de generalidad en suponer $i \neq j, i \neq p$ e $i \neq q$, en cuyo caso como $X_1, ..., X_n$ son independientes se tendrá que $X_i, X_jX_pX_q$ son independientes, luego $E(X_iX_jX_pX_q) = E(X_i)E(X_iX_pX_q) = 0$, lo que demuestra (b5).

De la igualdad en (b2) junto a (b3), (b4) y (b5) obtenemos que:

$$E(Z^2) = \tau^4 \left(\sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}|=1}}^{n} a_{ij}a_{pq} \right) + \sigma^4 \left(\sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}|=2}}^{n} a_{ij}a_{pq} \right)$$

$$= \tau^4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \right) + \sigma^4 \left(\sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}|=2}}^{n} a_{ij}a_{pq} \right)$$

de donde

$$V(Z) = \tau^4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 \right) + \sigma^4 \left(\sum_{\substack{i,j,p,q=1 \\ |\{i,j,p,q\}|=2}}^{n} a_{ij}a_{pq} \right) - \sigma^4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right)^2$$

Problema V.1.10

Sean $X_1, ..., X_n$ v.a. independientes tales que para cierto $\mu \in I\!R$ se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} E\ (X_i - \mu) \ = \ 0 & , & E[(X_i-\mu)^2] = \sigma^2 < +\infty \\ E[(X_i-\mu)^3] = \nu^3 & , & E[(X_i-\mu)^4] = \tau^4 < +\infty \end{array}$$

Se definen las v.a.

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Determine $E(\bar{X}), V(\bar{X}), E(S^2)$.

Solución:

Dado que $(\forall i = 1, ..., n) : E(X_i - \mu) = 0$, resulta que:

$$(\forall i = 1, ..., n) : E(X_i) = \mu \quad , \quad V(X_i) = \sigma^2$$

Del problema anterior si definimos $(\forall i = 1, ..., n) : a_i \equiv \frac{1}{n}$, como $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ se deduce que:

$$E(\bar{X}) = \mu \ (\sum_{i=1}^{n} a_i) \ = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma^2 (\sum_{i=1}^{n} a_i^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Por otro lado, al definir $(\forall i = 1, ..., n) : Y_i = X_i - \mu$ se tiene que:

(1) $Y_1, ..., Y_n$ son v.a. independientes
(2) $(\forall i = 1, ..., n) : \quad E(Y_i) = 0 \quad , \quad V(Y_i) = \sigma^2 < +\infty \quad$ y $\quad E(Y_i^4) = \tau^4 < +\infty$

Además

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)\right]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu) \right]^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_i \right]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n-1}{n} Y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-1}{n} Y_j \right]^2$$

luego definiendo $(\forall i, j \in \{1, ..., n\}) : b_{ij} \equiv \begin{cases} \frac{n-1}{n}, & i = j \\ -\frac{1}{n}, & i \neq j \end{cases}$ obtenemos que:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j \right\}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} Y_j \right\} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_{ik} Y_k \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} b_{ij} b_{ik} Y_j Y_k = \frac{1}{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} b_{ik} \right) Y_j Y_k$$

Por lo tanto al definir $(\forall j, k \in \{1, ..., n\}) : a_{jk} \equiv \sum_{i=1}^{n} b_{ij} b_{ik}$, vemos que

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} Y_j Y_k$$

De (1) y (2), junto al problema anteriormente desarrollado se obtiene que:

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} Y_j Y_k\right) = \frac{\sigma^2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$$

pero dado $i \in \{1, ..., n\}$ como

$$a_{ii} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell i} b_{\ell i} = b_{ii}^2 + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{n} b_{\ell i}^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} = \frac{(n-1)n}{n^2} = \frac{(n-1)}{n}$$

concluimos que:

$$E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) = \frac{\sigma^2}{n-1} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n} = \sigma^2.$$

Problema V.1.11

Una variable aleatoria X se dice positiva si, $I\!P(X \in I\!R_+) = 1$. Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias idénticamente distribuidas y positivas. Sin importar cual sea su distribución muestre que:

$$I\!E\left(\frac{X_1 + ... + X_k}{X_1 + ... + X_n}\right) = \frac{k}{n}$$

Solución:

Definamos las variables Y_i como:

$$Y_i = \frac{X_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Siendo las variables aleatorias X_i positivas podemos asegurar que las variables aleatorias Y_i toman valores solo en $[0,1]$. En principio, como son variables aleatorias, esto no tiene mucho sentido. Sin embargo esto quiere decir que $I\!P(Y_i \in [0,1]) = 1 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$. Para ver esto basta notar que $I\!P(0 \leq X_i \leq \sum\limits_{j=1}^{n} X_j) = 1$.

Esto asegura que $I\!E(Y_i) < \infty \quad \forall i = 1, ..., n$.

Como las variables X_i tienen todas igual distribución,

$\Rightarrow I\!E(X_i) = I\!E(X_j) \quad \forall i,j \in \{1,...,n\}$

Esto excluyendo el caso en que la esperanza de los X_i no este definida..

Del mismo modo:

$$I\!E(Y_i) = I\!E(Y_j) \ \forall i,j \in \{1,...,n\}$$

En el sentido de probabilidades $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i = 1$, puesto que solo es falso cuando el divisor es 0 y esto tiene probabilidad 0.
Como la esperanza es lineal se tendrá:
$n \cdot I\!E(Y_i) = 1 \quad \forall i = 1,...,n.$

En consecuencia:

$$I\!E\left(\frac{X_1 + ... + X_k}{X_1 + ... + X_n}\right) = \sum_{i=1}^{k} I\!E(Y_i) = \frac{k}{n}$$

Observación: Lo sorprendente del resultado es el hecho que el valor de esa esperanza no dependa de la distribución de los X_i. Sin embargo esto no es tan sorprendente puesto que se está considerando un cuociente de estas variables aleatorias. Las técnicas utilizadas para resolver el problema introducen la generalización de pertenencia a un conjunto de un número real para una variable aleatoria, esto es que la probabilidad de que la variable esté en ese conjunto es 1.

V.2 Esperanza y Varianza de Variables Aleatorias Discretas

Problema V.2.1

Considere el juego siguiente. Un jugador lanza una moneda hasta que sale cara, si salió cara en la etapa n entonces obtiene un beneficio de n^2. Calcule el valor esperado del beneficio del juego.

Solución:

El espacio muestral será $\Omega = [0,1]^{I\!N^*}$ con la σ-algebra de los cilindros.

Dado $\omega = (\omega_n)_{n \in I\!N^*} \in \Omega, \quad \omega_i = 0$ significa salió sello en la etapa i mientras que $\omega_i = 1$ significa que salió cara en la etapa i

Sea $A_1 = \left\{\omega \in \Omega / \omega_1 = 1\right\}$

$A_k = \left\{\omega \in \Omega / \omega_i = 0 \quad \forall i < k \quad w_k = 1\right\} \quad \forall k \geq 2$

Es claro que:

$I\!P(A_k) = (\frac{1}{2})^k$ por lo tanto el valor esperado será $\sum\limits_{k\geq 1} k^2(\frac{1}{2})^k$

Sea $S_r = \sum\limits_{k\geq 1} k^2 \cdot r^k$ con $0 < r < 1$

Unos sencillos cálculos:

$$r\sum_{k\geq 1} k\cdot k\cdot r^{k-1} = r\sum_{k\geq 1} k\frac{d}{dr}(r^k) = r\frac{d}{dr}(\sum_{k\geq 1} k\cdot r^k) = r\frac{d}{dr}(r\sum_{k\geq 1} k\cdot r^{k-1})$$

Sabemos que $\sum\limits_{k\geq 1} k\cdot r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$.

Por lo tanto $S_r = r\frac{d}{dr}\left[\frac{r}{(1-r)^2}\right] = r\frac{(1-r)^2+2r(1-r)}{(1-r)^4}$

Finalmente se concluye que:

$$S_r = \frac{r}{(1-r)^3}[(1-r)+2r] = \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$$

Evaluando para el valor $r = \frac{1}{2}$

$$S_r = \frac{(1/2)\cdot(3/2)}{(1/2)^3} = (\frac{3}{2})2^2 = 6$$

Observación:

La única dificultad de este problema consiste en el cálculo de la sumatoria que es un ejercicio clásico cuya reducción se basa en intercambiar un límite de sumatoria con uno de derivada.

Problema V.2.2

Se tiene una urna que contiene N bolas numeradas de 1 a N respectivamente. Se sacan n bolas de la urna $(n \leq N)$ y se ve el valor máximo de las n bolas.
Encuentre la distribución de la variable aleatoria que toma el valor de dicho máximo y su valor esperado.

Solución:

Sea X la variable aleatoria a examinar. Es claro que el soporte de esta variable aleatoria es $\{n, ..., N\}$ ya que con n bolas es imposible sacar menos que n.

Para que el valor máximo obtenido sea n hay que obtener las bolas $(1, 2, ..., n)$ que se pueden mezclar de $n!$ maneras.
El número total de configuraciones posibles de las n bolas es:

$$N \cdot (N-1) \cdot ... \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Entonces: $I\!P(X = n) = \frac{n! \cdot (N-n)!}{N!} = \frac{1}{\binom{N}{n}}$.

De ahora en adelante no consideraremos las permutaciones, es decir nos preocuparemos de cuantos grupos distintos podemos lograr y no del orden al interior de cada grupo.

Siguiendo el mismo tipo de razonamiento. $X = n + 1$ significa obtener la bola $(n + 1)$ en alguna de las n extracciones y las $(n - 1)$ bolas restantes deben pertenecer a $(1, 2, ..., n)$ esto es $\binom{n}{n-1}$ grupos posibles.

$$\Rightarrow I\!P(X = n+1) = \frac{\binom{n}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

Del mismo modo, $I\!P(X = n + 2)$ significa obtener la bola $(n + 2)$ en alguna de las n extracciones y el resto en $(1, 2, ..., n + 1)$
Por lo tanto:

$$I\!P(X = n+2) = \frac{\binom{n+1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

En general:

$$I\!P(X = n+k) = \frac{\binom{n+k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \text{ con } k \in \{0, ..., N-n\}$$

En particular esto prueba que:

$$\sum_{k=0}^{N-n} \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{N}{n} (*)$$

El valor esperado será por definición:

$$I\!E(X) = \sum_{k=0}^{N-n} (n+k) \binom{n+k-1}{n-1} / \binom{N}{n}$$

Como $\frac{n+k}{n}\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k}{n}$

$$\Rightarrow \binom{N}{n} \cdot I\!E(X) = \sum_{k=0}^{N-n} n \binom{n+k}{n} = n \sum_{k=0}^{N-n} \binom{n+k}{n}$$

Usando $(*)$ cambiando n por $n+1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N-(n+1)} \binom{n+1+k-1}{n+1-1} = \binom{N}{n+1} \text{ siempre que } n < N \\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{N-n-1} \binom{n+k}{n} = \binom{N}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\binom{N}{n} I\!E(X) = n \cdot \left[\binom{N}{n+1} + \binom{n+N-n}{N-n}\right] = n\left[\binom{N}{n+1} + \binom{N}{N-n}\right]$$

Si $N = n$ solo hay un valor que es N luego en ese caso $I\!E(X) = N$.

Para los demás valores de n:

$$\begin{aligned}
I\!E(X) &= n\left[\frac{\binom{N}{n+1} + \binom{N}{N-n}}{\binom{N}{n}}\right] \\
&= n\left[\frac{N!}{(n+1)!(N-n-1)!}\frac{n!(N-n)!}{N!} + \frac{N!}{(N-n)!n!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!}\right] \\
&= n\left[\frac{N-n}{n+1} + 1\right] = \frac{n(N+1)}{(n+1)} \text{ (Sirve aún con } N = n)
\end{aligned}$$

Luego $I\!E(X) = \frac{n(N+1)}{n+1}$ si $0 < n \leq N$.

Problema V.2.3

Una v.a. X se dice que tiene ley Poisson de parámetro $\lambda > 0$, lo que se anota $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$(\forall k \in I\!N) : P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Demostrar que $E(X) = \lambda$ y $V(X) = \lambda$.

Solución:

La v.a. X es discreta, pues $I\!N$ es numerable y

$$P[X \in I\!N] = \sum_{k \in I\!N} P[X = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Luego

$$
\begin{aligned}
E(X) := \sum_{k=0}^{+\infty} kP[X=k] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{ke^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

Como X es v.a. con esperanza finita, entonces:

$$
V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \lambda^2 \tag{1}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{\lambda^{k+1}}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda E(X) + \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

y por lo tanto de (1) concluimos que:

$$
V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
$$

Problema V.2.4

Una v.a. X *se dice binomial de parámetro* (n,p) *lo que se anota* $X \sim B(n,p)$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *y* $p \in [0,1]$ *si*

$$
(\forall k \in \{0,...,n\}) : P[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
$$

Demuestre que $E(X) = np$ *y* $V(X) = npq$ *donde* $q := 1-p$*.*

Solución:

Notemos que X es v.a. discrecta pues el conjunto $\{0,...,n\}$ es finito y

$$
P[X \in \{0,...,n\}] = \sum_{k=0}^{n} P[X=k] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1
$$

Sabemos que entonces

$$E(X) := \sum_{k=0}^{n} kP[X=k] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kp^k(1-p)^{n-k} = (1-p)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(\frac{p}{1-p})^k$$
$$= (1-p)^n(\frac{p}{1-p}) \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(\frac{p}{1-p})^{k-1}$$

Definamos la función $f : I\!R \to I\!R$ por $f(\theta) := (1+\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\theta^k$. Es claro que $f'(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^k k\theta^{k-1} = n(1+\theta)^{n-1}$, y por lo tanto

$$E(X) = (1-p)^n(\frac{p}{1-p}) \cdot f'(\frac{p}{1-p}) = (1-p)^n(\frac{p}{1-p}) \cdot n(1+\frac{p}{1-p})^{n-1} = np$$

Por otro lado, como X es v.a. con esperanza finita entonces

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - n^2p^2 \tag{1}$$

pero

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2P[X=k] = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kp^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= E(X) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= np + (1-p)^n(\frac{p}{1-p})^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)(\frac{p}{1-p})^{k-2}$$
$$= np + (1-p)^n(\frac{p}{1-p})^2 f''(\frac{p}{1-p})$$

como $f''(\theta) = n(n-1)(1-\theta)^{n-2}$ de lo anterior concluimos que:

$$E(X^2) = np + (1-p)^n(\frac{p}{1-p})^2 \cdot n(n-1)(1+\frac{p}{1-p})^{n-2} = np + p^2n(n-1)$$

y por lo tanto de (1) obtenemos que:

$$V(X) = np + p^2n(n-1) - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Problema V.2.5

Se dispone de N dados equilibrados que se lanzan simultáneamente de manera independiente. Cuando algún dado sale 6 se deja fijo y se prosigue con los que todavía no han salido 6. El juego finaliza cuando todos los dados están en 6.
Calcule:
(1) Probabilidad de haber obtenido 6, en cada uno de los dados, en k lanzamientos.
(2) Valor esperado de terminar el juego. Evalue completamente en los casos $N = 1, 2, 3$.

Solución:

(1) El espacio muestral será:

$$\Omega = \left\{ (\vec{x}_m)_{m\in I\!N} \Big/ \vec{x}_m = \begin{bmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{Nm} \end{bmatrix} \in \{1, ..., b\}^N \quad x_{nm} = b \Rightarrow x_{nm'} = b \ \ \forall m' \geq m \right\}$$

El vector $\vec{x}_m$ representa los resultados de los N dados obtenidos en el m-ésimo lanzamiento. Imponemos además que si un dado sale 6 en alguna etapa m se queda en 6 de ahí en adelante.

Como siempre en estos casos consideramos $\mathcal{F} =$ "cilindros de Ω". Asumimos independencia entre las coordenadas de $\vec{x}_m$ y entre $\vec{x}_m$ y $\vec{x}_{m'}$ $\quad \forall m \neq m'$.
El suceso buscado es:

$$A_k = \left\{ x \in \Omega \Big/ \vec{x}_k = \begin{bmatrix} 6 \\ \vdots \\ 6 \end{bmatrix} \wedge \exists n' \in \{1, ..., N\} \quad x_{n'k-1} \neq 6 \right\}$$

Es decir $A_k =$ "Todos los dados están en 6 en la etapa k, y al menos 1 distinto de 6 en $k-1$".

Llamemos $A_k^i = \big\{x \in \Omega / x_{ik} = 6 \wedge x_{i(k-1)} \neq 6\big\}$ con $i \in \big\{1, ..., N\big\}$.

En palabras, $A_k^i =$ "El dado i salió 6 en la etapa k por primera vez"

Por independencia entre lanzamientos:

$$I\!P(A_k^i) = (\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

Para que ocurra A_k algún dado debe salir 6 por primera vez en el lanzamiento k. Hay i dados con $i \in \{1, ..., N\}$ que pueden salir 6 por primera vez en k. Cuando fijo este i, puedo escoger $\binom{N}{i}$ maneras de repartir cuales serán los dados que saldrán 6. Sin importar cuales sean estos la probabilidad será igual por lo que la calcularemos para los primeros i, luego combinamos y finalmente sumamos.

Entonces definimos los conjuntos B_k^i como:

$$A_k^1 \cap \left(\bigcup_{m=1}^{k-1} A_m^2 \right) \cap ... \cap \left(\bigcup_{m=1}^{k-1} A_m^N \right) = B_k^1$$

$$\vdots$$

$$A_k^1 \cap ... \cap A_k^i \cap \left(\bigcup_{m=1}^{k-1} A_m^{i+1} \right) \cap ... \cap \left(\bigcup_{m=1}^{k-1} A_m^N \right) = B_k^i$$

$$\vdots$$

$$A_k^1 \cap ... \cap A_k^N = B_k^N$$

La probabilidad de estos nuevos conjuntos es:

Dado $i \in \{1, ..., N\}$ $\quad I\!P(B_k^i) = \left(\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \right)^{N-i} \cdot \left[\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^i$

$$\Rightarrow I\!P(B_k^i) = \left(\frac{1}{6}\right)^{N-i} \left[\frac{(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1})}{(1 - \frac{5}{6})} \right]^{N-i} \cdot \left[\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^i$$

$$= \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^{N-i} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^i$$

$$I\!P(A_k) = \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i} \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^{N-i} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^i$$

Utilizando el teorema del Binomio de Newton:

$$I\!P(A_k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^N - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^N$$

$$\Rightarrow I\!P(A_k) = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \right]^N - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \right]^N \qquad \forall k \geq 1$$

(2) El valor esperado será:

$$\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k\geq 1} k \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m}(-1)^m \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{km} - \left(\frac{5}{6}\right)^{(k-1)m}\right]$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \binom{N}{m}(-1)^m \left[\sum_{k\geq 1} k\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{m}\right]^{k} - \sum_{k\geq 1} k\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{m}\right]^{k-1}\right]$$

Recordando que: $\sum\limits_{m=1}^{N} kr^k = \frac{1}{(1-r)^2}$ si $0 < r < 1$

$$\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(A_k) = \sum_{m=1}^{N} \binom{N}{m}(-1)^m \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{m} - 1\right] \cdot \frac{1}{[(\frac{5}{6})^m - 1]^2}$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \binom{N}{m}(-1)^m \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{m} - 1\right]^{-1}$$

(3) Al evaluar la fórmula obtenida en (2).

$(N=1)$ $\quad \frac{1}{(1-\frac{5}{6})} = 6$

$(N=2)$ $\quad \binom{2}{1}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})} + \binom{2}{2}\frac{1}{[\frac{5}{6}^2-1]} = 2.6 - \frac{36}{(36-25)} = \frac{96}{11} = 8.\overline{72}$

$(N=3)$ $\quad \binom{3}{1}\cdot 6 - \binom{3}{2}\frac{36}{11} + \binom{3}{3}\frac{6^3}{(6^3-5^3)} = 18 - \frac{108}{11} + \frac{216}{91} = 10.\overline{555444}$

FUENTE : EDUCATED GUESSING
SAMUEL KOTZ, DONNA F. STROUP

Problema V.2.6

Se lanzan 3 dados de 6 lados de manera independiente, a continuación se ordenan de mayor a menor.
Sea $X = \left(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}\right)$ *el vector de resultados.*

(1) Calcule la función de distribución de X.

(2) Las funciones marginales de $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$

(3) ¿Son $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ *independientes?*

((4) Calcule $\mathbb{E}(X)$, *¿*$(\mathbb{E}(X_{(1)}), \mathbb{E}(X_{(2)}), \mathbb{E}(X_{(3)})) = \mathbb{E}(X)$*?*

Solución:

(1) Los resultados posibles al lanzar 3 dados son $6^3 = 216$.

Como el experimento consiste en lanzarlos al azar de manera independiente es razonable suponer que cualquier configuración (k_1, k_2, k_3) tiene igual probabilidad que deberá ser igual a $\frac{1}{216}$.

Sin embargo, los resultados posibles una vez que se han ordenado de mayor a menor serán:

$$(k_1, k_2, k_3) \in \{1, ..., 6\}^3 \text{ tales que } k_1 \geq k_2 \geq k_3 \quad [0]$$

Este será el soporte de la distribución conjunta de los dados.

Suponiendo que se tiene un trío de valores obtenidos ya ordenados de mayor a menor, la pregunta es, ¿ Cuantos resultados no ordenados dan ese resultado al ser ordenados ?. Si la respuesta fuese la misma para cualquier trio entonces también esta distribución sería equiprobable, obviamente no es así.

Ahora particionaremos el soporte (0) en tres conjuntos donde el valor anterior es constante.

Si $(k_1 = k_2 = k_3)$ [1] $\Rightarrow$ Hay un solo resultado posible.

Si $(k_1 = k_2 \neq k_3 \vee k_1 = k_3 \neq k_2 \vee k_2 = k_3 \neq k_1)$ [2] $\Rightarrow$ Hay tres resultados posibles.

Si $(k_1 \neq k_2 \neq k_3)$ [3] $\Rightarrow$ Hay seis resultados posibles.

En consecuencia la distribución conjunta será:

$$I\!P[X = (k_1, k_2, k_3)] = \begin{cases} 1/216 & \text{si } [1] \wedge [0] \\ 3/216 & \text{si } [2] \wedge [0] \\ 6/216 & \text{si } [3] \wedge [0] \\ 0 & \text{si } \sim [0] \end{cases}$$

(2) Para obtener la marginal de $X_{(1)}$ a partir de la conjunta sumamos sobre todos los valores de k_2 y k_3.

$$I\!P[X_{(1)} = k_1] = \sum_{k_2=1}^{6} \sum_{k_3=1}^{6} I\!P[X = (k_1, k_2, k_3)] = \sum_{k_2=1}^{k_1} \sum_{k_3=k_2}^{k_1} I\!P[X = (k_1, k_2, k_3)]$$

Si $(k_1 > 2)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_3=k_2}^{k_1} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + I\!P[X=(k_1,k_1,k_1)] \\
&= \frac{1}{216} + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_3=k_2}^{k_1-1} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} I\!P[X=(k_1,k_2,k_1)] \\
&= \frac{[3(k_1-1)+1]}{216} + \sum_{k_2=1}^{k_1-2} \sum_{k_2=k_2+1}^{k_1-1} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + \sum_{k_2=1}^{k_1-1} I\!P[X=(k_1,k_2,k_2)] \\
&= \frac{[6(k_1-1)+1]}{216} + \frac{6}{216} \sum_{k_2=1}^{k_1-2} (k_1-1-k_2-1+1) \\
&= \frac{[6(k_1-1)+1]}{216} + \frac{6}{216} \left[k_1(k_1-2) - (k_1-2) - (k_1-2)\frac{(k_1-1)}{2} \right] \\
&= \frac{6(k_1-1)+1}{216} + \frac{6(k_1-2)}{216}\frac{(k_1-1)}{2} \\
&= \frac{1}{216}[(k_1-1)[6+3(k_1-2)]+1]
\end{aligned}
$$

Se verifica que la fórmula anterior sirve aun cuando k_1 vale 1 o 2. Resumimos la probabilidad marginal en la siguiente tabla.

k_1	$I\!P$
1	1/216
2	7/216
3	19/216
4	37/216
5	61/216
6	91/216

De manera análoga para calcular la marginal de $X_{(2)}$:

$$
I\!P[X_{(2)} = k_2] = \sum_{k_1=1}^{6} \sum_{k_3=1}^{6} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] = \sum_{k_1=k_2}^{6} \sum_{k_3=1}^{k_2} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)]
$$

Si $(k_2 < 6)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=k_2+1}^{6} \sum_{k_3=1}^{k_2} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + \sum_{k_3=1}^{k_2} I\!P[x=(k_2,k_2,k_3)] \\
&= \frac{3}{216}(k_2-1) + \frac{1}{216} + \sum_{k_1=k_2+1}^{6} \sum_{k_3=1}^{k_2-1} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + \sum_{k_1=k_2+1}^{6} I\!P[X=(k_1,k_2,k_2)] \\
&= \frac{3(k_2-1)+1+3(6-k_2)}{216} + \frac{6}{216}(k_2-1)(6-k_2) \\
&= \frac{1}{216}\left[16+6(k_2-1)(6-k_2)\right]
\end{aligned}
$$

La distribución marginal será:

k_2	$I\!P$
1	16/216
2	40/216
3	52/216
4	52/216
5	40/216
6	16/216

Finalmente para calcular la distribución marginal de $X_{(3)}$.

$$
I\!P[X_{(3)} = k_3] = \sum_{k_1=k_3}^{6} \sum_{k_2=k_1}^{6} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=k_3+1}^{6} \sum_{k_2=k_1}^{6} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + \sum_{k_2=k_3}^{6} I\!P[X=(k_3,k_2,k_3)] \\
&= \frac{1}{216} + \frac{3}{216}(6-k_3) + \sum_{k_1=k_3+1}^{5} \sum_{k_2=k_1+1}^{6} I\!P[X=(k_1,k_2,k_3)] + \sum_{k_1=k_3+1}^{6} I\!P[X=(k_1,k_1,k_3)] \\
&= \frac{6(6-k_3)+1}{216} + \sum_{k_1=k_3+1}^{5} (6-k_1)\frac{6}{216} \\
&= \frac{6(6-k_3)+1+36(5-k_3)-3\cdot 30}{216} + \frac{3k_3(k_3+1)}{216}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la distribución marginal de $X_{(3)}$ es:

k_3	$I\!P$
1	91/216
2	61/216
3	37/216
4	19/216
5	7/216
6	1/216

(3) Basta ver que:

$$I\!P[X_{(1)} = 1, X_{(2)} = 2, X_{(3)} = 3] \neq I\!P[X_{(1)} = 1]I\!P[X_{(2)} = 2]I\!P[X_{(3)} = 3]$$

Para probar que no son independientes, lo cual es evidente sin mayores cálculos.

(4)

$$I\!E(X_{(1)}) = \frac{1 + 2 \cdot +3 \cdot 19 + 4 \cdot 37 + 5 \cdot 61 + 6 \cdot 91}{216} = 4,95833$$

$$I\!E(X_{(3)}) = \frac{91 + 2 \cdot 61 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 1}{216} = 2,014166$$

$$I\!E(X_{(2)}) = 3,5$$

Por definición:

$$I\!E(X) = \sum_{k_1=1}^{6} \sum_{k_2=k_1}^{6} \sum_{k_3=k_2}^{6} X \cdot I\!P[X = (k_1, k_2, k_3)]$$

$$\Rightarrow I\!E(X) = \big(I\!E(X_{(1)}), I\!E(X_{(2)}), I\!E(X_{(3)})\big)$$

Observación:

El método utilizado para resolver este problema no es el mas corto posible. Hay técnicas clásicas para calcular la distribución de los denominados, estadísticos de orden, que requieren menos cálculos, pero son más difíciles de digerir. El objetivo de resolver el problema de esta manera es practicar el manejo de sumatorias iteradas que son muy utilizadas en el cálculo de probabilidades.

Problema V.2.7

Dos personas X e Y disponen de x e y monedas respectivamente, que apuestan de una en una en el siguiente juego. Cada jugador lanza una de sus monedas, si salen caras distintas el que saca cara se lleva ambas monedas, si no es empate y se sigue jugando hasta que uno de los dos pierde todas sus monedas. Calcule el valor esperado de lanzamientos hasta que alguno pierda cuando (x, y) vale (1,1) (2,1) (1,2) y (2,2).

Solución:

Sea $E(x,y)$ el valor buscado. El espacio muestral asociado al experimento es,

$$\Omega_1 = \big\{(c,c),(s,s),(s,c),(c,s)\big\} \quad \Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}} \qquad \mathcal{F} = \text{“ cilindros de } \Omega\text{''}$$

Para calcular $E(1,1)$, definamos el suceso A_k como: $A_k =$ “ X pierde en la etapa k ”

$$\Rightarrow A_k = \bigotimes_{i=1}^{k-1} \big\{(c,c),(s,s)\big\} \times (s,c)$$

Por independencia entre lanzamientos la probabilidad de que ocurra esto es:

$$I\!P(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4}$$

Debido a que la probabilidad de obtener cara es igual a la probabilidad de obtener sello se tiene que:

$B_k =$“Y pierde en la etapa k” tiene probabilidad, $I\!P(B_k) = I\!P(A_k)$

En consecuencia el valor esperado será:

$$E(1,1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot I\!P(A_k \cup B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} k$$

Recordemos que:

$$0 < r < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dr}(r^k) = \lim_{N\to\infty} \frac{d}{dr} \left(\sum_{k=1}^{N} r^k\right) = \frac{d}{dr} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} r^k\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} k = \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{1-r}\right) = \frac{1-r+r}{(1-r)^2} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

Al aplicarlo con $r = \frac{1}{2}$ finalmente obtenemos:

$$E(1,1) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Para calcular $E(2,1)$, utilizamos las mismas definiciones para A_k y B_k, pero los elementos de A_k han cambiado en consecuencia la probabilidad que X pierda ha cambiado. De hecho no puede quebrar a la primera.

$$A_k = \bigcup_{i=2}^{k-1} \left(\bigotimes_{j=1}^{i-1} \big\{(c,c),(s,s)\big\} \times (s,c) \times \bigotimes_{j=1}^{k-1-i} \big\{(c,c),(s,s)\big\} \times (s,c) \right)$$

Entonces la probabilidad que X gane ahora es:

$$I\!P(A_k) = \sum_{i=2}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

La probabilidad de que Y pierda en la etapa k no ha cambiado por lo que tenemos:

$$E(2,1) = I\!P(B_1) + \sum_{k=2}^{\infty} k I\!P(A_k \cup B_k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 (k-1)\frac{1}{2}^{k-1} + \frac{1}{2}^{k-2}\frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] + \frac{1}{4}$$

Recordemos una vez más que:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)r^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{d}{dr}(r^{k-1}) = \frac{d}{dr}\left(\sum_{k=2}^{\infty} kr^{k-1}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{(1-r)^2} - 1\right) = \frac{2}{(1-r)^3}$$

Nuevamente al utilizar este resultado con $r = \frac{1}{2}$:

$$E(2,1) = \frac{1}{4^2} \cdot 4^3 + 1 = 9$$

Como la moneda es equilibrada las posibilidades de X y de Y son iguales si tienen el mismo número de monedas, esto asegura que:

$$E(x,y) = E(y,x) \quad \forall x,y \in I\!N \Rightarrow E(1,2) = 9$$

Para calcular $E(2,2)$ notamos que B_k ahora es igual al anterior conjunto A_k.

$$E(2,2) = \sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{4^2} \cdot 2 \cdot 4^3 = 16$$

Observación:

Veamos como se podría calcular $E(x,y)$ para los demás valores de x e y.
Dado que X tiene x e Y tiene y una vez que se juega una vez, pueden ocurrir 3 cosas:

(1) X pierde $\Rightarrow$ X tiene $x-1$ e Y tiene $y+1$ con probabilidad $\frac{1}{4}$
(2) X gana $\Rightarrow$ X tiene $x+1$ e Y tiene $y-1$ con probabilidad $\frac{1}{4}$
(3) X, Y empatan $\Rightarrow$ X tiene x e Y tiene y con probabilidad $\frac{1}{2}$

Lo anterior permite plantear una recurrencia entre $E(x,y), E(x+1,y-1)$ y $E(x-1,y+1)$ con miras a una fórmula general.

V.3 Esperanza y Varianza de Variables Aleatorias Absolutamente Continuas

Problema V.3.1

Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+y) & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

(a) Calcule las densidades marginales de X e Y.
(b) Calcule $\mathbb{E}(XY)$.
(c) ¿Son X e Y independientes ?. Justifique su respuesta.

Solución:

(a) Por definición:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^1 f_{XY}(x,y)dy = 2\left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{y=1} \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2\left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right) = -3x^2 + 2x + 1 \quad (0 \le x \le 1) \\ f_Y(y) &= \int_0^y f_{XY}(x,y)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + yx\right)\Big|_{x=0}^{x=y} \\ &= 2\left(\frac{y^2}{2} + y^2\right) - 2 \cdot 0 = 3y^2 \quad (0 \le y \le 1) \end{aligned}$$

(b) Nuevamente por definición:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_x^1 \int_0^y xy \cdot f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 y \int_0^y 2(x^2 + xy)dxdy \\ &= \int_0^1 y \cdot 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2}\right)\Big|_0^y dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y^4 + y^4\right) dy \\ &= \frac{5}{3}\frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c) No son independientes pues $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{XY}(x, y)$.

A priori no es posible que las variables X e Y fuesen independientes puesto que hay dependencia de ambas variables con respecto al dominio de la densidad conjunta, y las marginales no pueden depender de la otra variable.

Problema V.3.2

Una v.a. X se dice que tiene ley exponencial de parámetro $\lambda > 0$, lo que se anota $X \sim e(\lambda)$ si tiene función de densidad

$$(\forall x \in \mathbb{R}): \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty)}(x)$$

Demuestre que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Solución:

Dado que la v.a. X tiene función de densidad y $P[X \geq 0] = 1$ se tiene que

$$E(X) := \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

pero como $\quad (xe^{-\lambda x})' = e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} \quad$ entonces

$$\int \lambda x e^{-\lambda x} dx = \int e^{-\lambda x} dx - \int (xe^{-\lambda x})' dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - xe^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}(\frac{1}{\lambda} + x)$$

y por lo tanto

$$E(X) = -e^{-\lambda x}(\frac{1}{\lambda} + x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Al ser X v.a. con esperanza finita, sabemos que:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2} \tag{1}$$

Por otro lado:

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{+\infty} x^2 (e^{-\lambda x})' dx$$

$$= (-x^2 e^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

luego como $\lambda > 0$ entonces $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\lambda x} = 0$ y por lo tanto

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

De (1) obtenemos que:

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Problema V.3.3

Una v.a. X se dice que tiene ley normal de media μ y varianza σ^2, lo que se anota $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si tiene densidad dada por

$$(\forall x \in I\!R): \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Se pide que:
(a) Muestre que f_X es efectivamente función de densidad, y que
(b) $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$

Solución:

(a) Claramente $(\forall x \in I\!R) : f_X(x) \geq 0$, luego para concluir que f_X es función de densidad habrá que mostrar que:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_X(x)dx = 1 \qquad (a1)$$

Consideremos la aplicación lineal $g : I\!R \to I\!R$ definida por $g(x) := \frac{x-\alpha}{\sigma}$ entonces resulta evidente que

$$(\forall\alpha > 0) : \int_{-\alpha}^{+\alpha} f_x(x)dx = \int_{g(-\alpha)}^{g(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Como $\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = +\infty$ y $\lim_{\alpha\to+\infty} g(-\alpha) = -\infty$ para verificar (a1) es necesario y suficiente demostrar que:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1 \qquad (a2)$$

En efecto, dado $\alpha > 0$ se tiene que:

$$\left(\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dydx \quad = \int\int_{[-\alpha,+\alpha]\times[-\alpha,+\alpha]} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} d(x,y)$$

Definiendo para cada $r > 0$ la región

$$R(r) := \{(x,y) \in I\!R^2 | x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

es claro que $\qquad R(\alpha) \subset [-\alpha, +\alpha] \times [-\alpha, +\alpha] \subset R(\sqrt{2}\alpha) \qquad$ luego

$$\int\int_{R(\alpha)} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} d(x,y) \leq \left(\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 \leq \int\int_{R(\sqrt{2}\alpha)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} d(x,y) \qquad (a3)$$

Mediante un cambio de variable que transforme coordenadas cartesianas en polares se tiene que

$$(\forall \alpha > 0) : \int_{R(\alpha)} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} d(x,y) = \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr = \int_0^{\alpha} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

luego

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int\int_{R(\alpha)} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} d(x,y) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \int\int_{R(\sqrt{2}\alpha)} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} d(x,y) = 1$$

de donde en virtud de (a3) podemos concluir que:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \left(\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = 1$$

y por lo tanto, como $(\forall \alpha > 0) : \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 0$ de la igualdad anterior obtenemos que:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{1} = 1$$

lo que demuestra (a2) y por lo tanto (a1).

(b) Para determinar la esperanza y varianza de la v.a. X con ley $N(\mu,\sigma^2)$ nos valdremos de un hecho muy utilizado para éste tipo de variable. Consideremos la v.a. $Y \equiv \frac{X-\mu}{\sigma}$ que sabemos (pues $\sigma > 0$) que tiene función de densidad dada por

$$(\forall y \in I\!R): \qquad f_Y(y) := \sigma f_X(\sigma y + \mu) = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma y+\mu-\mu}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

i.e. $Y \sim N(0,1)$. De la identidad

$$X = \sigma Y + \mu$$

concluimos que si Y es v.a con esperanza entonces también lo es X y además

$$E(X) = \sigma E(Y) + \mu \qquad (b1)$$

$$V(X) = \sigma^2 V(Y) \qquad (b2)$$

Demostraremos que $E(Y) = 0$ y que $V(Y) = 1$. En efecto

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \lim_{\alpha,\beta \to +\infty} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{2}} - e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Por otro lado como $E(Y) = 0$ entonces

$$V(Y) = E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-y}{\sqrt{2\pi}} \cdot -y e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{y}{\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{y^2}{2}})' dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) dy$$

De lo desarrollado en (a), como $Y \sim N(0,1)$ entonces f_Y es función de densidad luego de la última expresión concluimos que: $V(Y) = 1$. A partir de (b1) y (b2) obtenemos que

$$E(X) = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu$$
$$V(X) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2$$

Problema V.3.4

Sea X variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = (\frac{1}{\theta}) x^{\frac{-(1+\theta)}{\theta}} \cdot 1\!\!1_{x \geq 1}(x) \quad \theta > 0$$

Además sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria indepediente de X.
Calcule la probabilidad de que al menos k de estas variables tomen valores menores que 2.5 sabiendo que $I\!E(Y) = 3$, con $Y = \ln X$.

Solución:

Calculemos primero la distribución de $Y = \ln X$

$$F_Y(y) = I\!P[Y \leq y] = I\!P[\ln X \leq y] = I\!P[X \leq e^y] = \begin{cases} 0 & \text{si } e^\gamma < 1 \\ \int_1^{e^y} \frac{1}{\theta} x^{-(1+\theta)/\theta} dx & \text{si } e^\gamma \geq 1 \end{cases}$$

Es claro que $e^\gamma < 1 \Rightarrow y < Ln1 = 0$

$$\frac{1}{\theta} \int_1^{ey} x^{-(1+\theta)/\theta} dx = \frac{1}{\theta} \frac{x^{(-1-\theta+\theta)/\theta}}{(-1-\theta+\theta)/\theta} \Big|_1^{e^y} = x^{-1/\theta} \Big|_{e^y}^{1} = (1 - e^{y/\theta})$$

Entonces:

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y\theta} & y \geq 0 \end{cases}$$

Observemos que $1 - e^{-y/\theta} = \int_0^y \frac{e^{-s/\theta}}{\theta} dx$, por lo tanto es una distribución exponencial.

Para poder determinar el valor del parámetro calculemos la esperanza de Y en función del parámetro. Para esto basta integrar por partes.

$$I\!E(Y) = \int_0^\infty \theta^{-1} y e^{-y/\theta} dy = \theta^{-1} \int_0^\infty y e^{-y/\theta} dy = y e^{-y/\theta} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y/\theta} dy$$

Como $\theta^{-1} e^{-y/\theta}$ es función de densidad entonces:

$$\int_0^\infty \theta^{-1} e^{-y/\theta} dy = 1$$

Esto muestra que: $I\!E(Y) = \theta \Rightarrow \theta = 3$

Notemos que $X_i \in [1, 2.5] \Leftrightarrow \ln X_i \in [0, \ln 2.5]$.

La probabilidad de que las primeras j variables X_i estén entre 1 y 2.5 y el resto fuera es igual a:

$$I\!P[1 \leq X_1 \leq 2.5 \wedge ... \wedge 1 \leq X_j \leq 2.5 \wedge X_{j+1} > 2.5 \wedge ... \wedge X_n > 2.5]$$

Como es habitual con familias i.i.d., por independencia e idéntica distribución lo anterior será igual a:

$$(I\!P[1 \leq X_1 \leq 2.5])^j (I\!P[X_1 > 2.5])^{n-j}$$

$$\begin{aligned} I\!P[1 \leq X_1 \leq 2.5] = I\!P[0 \leq \ln X_1 \leq \ln 2.5] = F_{X_1}(\ln 2.5) &= 1 - (e^{-\ln 2.5})^{1/3} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

$$I\!P[X_1 > 2.5] = 1 - I\!P[1 \leq X_1 \leq 2.5] = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3}$$

Definamos $p = (\frac{2}{5})^{1/3}$ entonces la respuesta anterior será $(1-p)^j p^{n-j}$ podemos escoger $\binom{n}{j}$ grupos distintos de j variables para que tomen los valores entre 1 y 2.5 todos con la probabilidad anterior por lo tanto la probabilidad pedida será:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} (1-p)^j p^{n-j} \text{ con } p = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3}$$

Problema V.3.5

Suponga que $X \sim U[0,1]$. Determine los valores de $t \in I\!R$ tal que $I\!E(X^t)$ sea finita. ¿Cuáles son esos valores?

Solución:

$$I\!E(X^t) = \int_0^1 x^t dx = \left.\frac{x^{t+1}}{(t+1)}\right|_0^1 \text{ si } t \neq -1$$

$$I\!E(1/X) = \int_0^1 \frac{dx}{x} \text{ diverge}$$

Luego existe $\forall t \neq -1$ en ese caso $I\!E(X^t) = \frac{x^{t+1}}{t+1}|_0^1 = \frac{1}{t+1}$ con $t \neq -1$.

Problema V.3.6

El tiempo de funcionamiento de un satélite se modela como una variable aleatoria distribuida exponencialmente con un tiempo esperado de 1.5 años.

Si se lanzan simultáneamente 3 satélites, ¿Cuál es la probabilidad de que después de 2 años sigan funcionando exactamente 2?

Solución:

Sin disponer de mayor información es razonable suponer que hay independencia entre los tiempos de duración de cada satélite. La función de distribución exponencial de parámetro θ es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\theta}$$

Como $I\!E(X) = \theta \Rightarrow \theta = 1.5 = 3/2$.

De los 3 satélites podemos escoger 2 de $\binom{3}{2}$ maneras, estos 2 serán los que seguirán funcionando $\left[\binom{3}{2} = 3\right]$

Sea X_1, X_2 una de las parejas de satelites escogida para durar, calculamos:

$$I\!P[X_1 > 2, X_2 > 2] = I\!P[X_1 > 2] \cdot I\!P[X_2 > 2] = [e^{-4/\theta}]^2 = e^{-8/3}$$

Luego la probabilidad pedida es: $\binom{3}{2}e^{-8/3} \approx 0.208$.

Problema V.3.7

Sean X, Y variables aleatorias independientes absolutamente continuas con distribuciones F y G respectivamente.
Calcule $I\!E[G(X) + F(Y)]$, y utilice lo anterior para calcular $I\!E[F(X)]$.

Solución:

Sabemos que $\exists f, g$ integrables tales que $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ y $G(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g(t)dt$.

Como X e Y son independientes $\Rightarrow G(X)$ y $F(Y)$ son independientes. Por definición:

$$I\!E[G(X) + F(Y)] = I\!E[G(X)] + I\!E[F(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)f(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)dt$$

Una vez que se prueba que las integrales convergen aplicando integración por partes se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(t)f(t) + F(t)g(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}[F(t)G(t)]dt = F(t)G(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 - 0$$

En consecuencia $I\!E[G(X)+F(Y)]=1 \quad \forall X,Y$ variables aleatorias absolutamente continuas.

Sea Y copia independiente de $X \Rightarrow I\!E[2\cdot F(X)]=1$ por lo tanto $I\!E[F(X)]=\frac{1}{2}$.

Para probar que las integrales estan bien definidas basta notar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t)f(t)dt = \left|\int_{-\infty}^{\infty} G(t)f(t)dt\right| \leq \sup_{t\in I\!R}|G(t)|\cdot\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\right| \leq 1\cdot 1$$

Esto pues G es distribución y f es densidad por lo tanto la integral es finita, lo mismo ocurre con la segunda integral lo que permite manipular las integrales aplicando el teorema fundamental del cálculo.

Observación:

¿Qué ocurre con X,Y variables aleatorias discretas e independientes?
Otro problema interesante es calcular la distribución de $F(X)$ siendo F la función de distribución de X cuando es absolutamente continua.

V.4 Función Característica

Problema V.4.1

Dada una v.a. X se define la función $\varphi_x : I\!R \rightarrow \mathbb{C}$ (llamada función característica de X) por

$$(\forall t\in I\!R): \quad \varphi_X(t) := E(e^{itx}) = E[cos(tX)] + iE[sen(tX)]$$

Demostrar que:
(a) $\varphi_X(0)=1$

(b) $(\forall t\in I\!R): \quad |\varphi_X(t)|\leq 1$

(c) $(\forall t\in I\!R): \quad \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t)$

Solución:

En efecto de la definición sale que

$$\varphi_X(0) := E[cos(0\cdot X)] + E[sen(0\cdot X)] = E[1] + iE[0] = 1$$

lo que demuestra (a).

Antes de demostrar (b), recordemos que si Y es un v.a. con esperanza finita entonces $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$, de donde como $V(Y) \geq 0$ obtenemos que $[E(Y)]^2 \leq E(Y^2)$. Dado $t \in I\!R$ como las variables aleatorias $cos(tX)$ y $sen(tX)$ son acotados, en particular tienen esperanza finita. De lo anterior sale que:

(1) $\{E[cos(tX)]\}^2 \leq E[cos^2(tX)]$
(2) $\{E[sen(tX)]\}^2 \leq E[sen^2(tX)]$

Al sumar (1) con (2) obtenemos que:

$$\begin{aligned}\{E[cos(tX)]\}^2 + \{E[sen(tX)]\}^2 &\leq E[cos^2(tX)] + E[sen^2(tX)] \\ &= E[cos^2(tX) + sen^2(tX)] \\ &= E[1] = 1\end{aligned}$$

y por lo tanto como $|\varphi_X(t)| := \sqrt{\{E[cos(tX)]\}^2 + \{E[sen(tX)]\}^2}$, de la desigualdad anterior concluimos que:

$$|\varphi_X(t)| \leq 1$$

lo que demuestra (b).

Por otro lado, recordando que las funciones trigonométricas $sen(\cdot)$ y $cos(\cdot)$ son funciones impar y par respectivamente, es directo que

$$\begin{aligned}(\forall t \in I\!R) : \overline{\varphi_X(t)} &:= E[cos(tX)] - iE[sen(tX)] = E[cos(-tX)] + iE[sen(-tX)] \\ &=: \varphi_X(-t)\end{aligned}$$

lo que demuestra (c).

Problema V.4.2

Demostrar que si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$(\forall t \in I\!R) : \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

Concluir que $(\forall a, b \in I\!R)(\forall t \in I\!R) : \varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$.

Solución:

En efecto, recordando las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}cos(\alpha + \beta) &= cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta \\ sen(\alpha + \beta) &= sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta\end{aligned}$$

se tiene que

$$(\forall t \in I\!R) : cos[t(X+Y)] = cos(tX)cos(tY) - sen(tX)sen(tY) \tag{1}$$

$$(\forall t \in I\!R) : sen[t(X+Y)] = sen(tX)cos(tY) + cos(tX)sen(tY) \tag{2}$$

Por otro lado dado $t \in I\!R$ como X e Y son independientes se tendrá por ejemplo que $cos(tX), cos(tY)$ son idenpendientes, y por lo tanto como $cos(tX)$ y $cos(tY)$ son v.a. con esperanza finita, sabemos que:

$$E[cos(tX)cos(tY)] = E[cos(tX)]E[cos(tY)] \tag{4}$$

Análogamente se deduce que:

$$E[sen(tX)sen(tY)] = E[sen(tX)]E[sen(tY)] \tag{5}$$

$$E[sen(tX)cos(tY)] = E[sen(tX)]E[cos(tY)] \tag{6}$$

$$E[cos(tX)sen(tY)] = E[cos(tX)]E[sen(tY)] \tag{7}$$

Al tomar esperanza en (1), (2) y luego usar las igualdades (4), (5), (6) y (7) se obtiene que $(\forall t \in I\!R)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &:= E[cos(tX)]E[cos(tY)] - E[sen(tX)]E[sen(tY)] \\
&\qquad + iE[sen(tX)]E[cos(tY)] + iE[cos(tX)]E[sen(tY)] \\
&= E[cos(tX)] \ \cdot \{ \ E[cos(tY)] + iE[sen(tY)] \ \} \\
&\qquad + i \ E[sen(tX)] \ \cdot \{ \ E[cos(tY)] + i \ E[sen(tY)] \ \} \\
&= E[cos(tX)]\varphi_Y(t) + iE[sen(tX)]\varphi_Y(t) \\
&= \{E[cos(tX)] + iE[sen(tX)]\}\varphi_Y(t) \\
&= \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)
\end{aligned}$$

i.e. $\quad (\forall t \in I\!R) : \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$

Destacamos que inductivamente se demuestra que si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes entonces

$$(\forall t \in I\!R) : \varphi_{X_1+...+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t).$$

Demostremos ahora que dados $a, b \in I\!R$

$$(\forall t \in I\!R) : \varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$$

En efecto al definir las variables aleatorias

$$X_1 := aX, \quad X_2 := b$$

como X_2 es v.a. constante entonces es independiente de cualquier otra v.a. ,en particular de X_1. Aplicando lo recién demostrado, obtenemos que

$$(\forall t \in I\!R) : \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \tag{7}$$

Pero dado $t \in I\!R$ es claro que

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1}(t) &:= E[cos(t \cdot aX)] + iE[sen(t \cdot aX)] = E[cos(at \cdot X)] + iE[sen(at \cdot X)] \\ &=: \varphi_X(at)\end{aligned}$$

y además

$$\varphi_{X_2}(t) := E[cos(t \cdot b)] + iE[sen(t \cdot b)] = cos(tb) + isen(tb) := e^{itb}$$

por lo tanto, de (7) obtenemos que

$$(\forall t \in I\!R) : \varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

Problema V.4.3

Demostrar que si X, Y son v.a. y F_X, F_Y son su respectivas funciones de distibución entonces

$$\varphi_X = \varphi_Y \Leftrightarrow F_X = F_Y$$

Solución:

Demostremos primero que si

$$F_X = F_Y \Rightarrow \varphi_X = \varphi_Y$$

En efecto, dado $t \in I\!R$ como X e Y tiene igual distribución entonces

(1) $cos(tX), cos(tY)$ tienen igual distribución, y
(2) $sen(tX), sen(tY)$ tienen igual distribución

lo anterior pues si definimos para cada $u \in I\!R$ el conjunto

$$C(u) := \{x \in I\!R \text{ tal que } cos(tx) \leq u\}$$

entonces como X e Y tienen igual distribución se tiene que

$$(\forall u \in I\!R) : P[X \in C(u)] = P[y \in C(u)]$$

de donde

$$(\forall u \in I\!\!R) : P[cos(tX) \leq u] = P[X \in C(u)] = P[y \in C(u)] = P[cos(tY) \leq u]$$

i.e. $cos(tX), cos(tY)$ tienen igual distribución, lo que demuestra (1). Un argumento análogo demuestra (2).
Finalmente, usando que si dos v.a. tienen igual distribución entonces una de ellas tiene esperanza finita si y sólo si la otra tiene esperanza finita, en cuyo caso ambas esperanzas coinciden, de (1) y (2) sale que $E[cos(tX)] = E[cos(tY)]$ y $E[sen(tX)] = E[sen(tY)]$. De ésto se deduce trivialmente que $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, y por lo tanto, como lo anterior se tiene para todo $t \in I\!\!R$, concluimos que $\varphi_X = \varphi_Y$.

Procedemos ahora a demostrar que si

$$\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow F_X = F_Y$$

Para ésto, aceptaremos el siguiente resultado (cuya demostración se escapa a los objetivos del presente curso).

Lema: Si Z es una v.a., F_Z es la función de distribución de Z y φ_Z es la función característica de Z entonces $(\forall a < b)$:

$$\frac{F_Z(b) + F_Z(b^-)}{2} - \frac{F_Z(a) + F_Z(a^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_Z(t) dt$$

En particular, si a y b son puntos de continuidad de F_Z entonces $F_Z(a) = F_Z(a^-)$ y $F_Z(b) = F_Z(b^-)$, de donde por el lema sale que:

$$F_Z(b) - F_Z(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_Z(t) dt \tag{3}$$

Basados en (3) demostraremos que $F_X = F_Y$. En fecto, dado que F_X e F_Y son funciones crecientes, ellas tienen a lo más una cantidad numerable de discontinuidades. Sean

$D_X := \{x \in I\!\!R$ tal que x es punto de discontinuidad de $F_X\}$, y
$D_Y := \{x \in I\!\!R$ tal que x es punto de discontinuidad de $F_Y\}$

entonces claramente $D := D_X \cup D_Y$ es un conjunto numerable. Como $\varphi_X = \varphi_Y$ entonces

$$(\forall a < b)(\forall T > 0) : \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt = \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_Y(t) dt$$

de donde por (3) obtenemos que

$$(\forall b \in I\!R \setminus D) : F_X(b) = F_Y(b) \tag{6}$$

De este modo hemos probado que F_X y F_Y coinciden fuera de D. Para concluir bastará demostrar que si $b \in D$ entonces $F_X(b) = F_Y(b)$. En efecto, como D es numerable entonces dado cualquier número real existe una sucesión decreciente de elementos fuera D convergente a dicho número. En particular, dado $b \in D$ se tendrá que $\exists (b_n)_{n\in I\!N} \subset I\!R \setminus D$ tal que $b_n \downarrow^n b$. De (6) sale que

$$(\forall n \in I\!N) : F_X(b_n) = F_Y(b_n) \tag{7}$$

pero como F_X e F_Y son funciones de distribución en particular son continuas por la derecha, luego como

$$b_n \downarrow^n b \Rightarrow \left[\lim_n F_x(b_n) = F_X(b) \quad \wedge \quad \lim_n F_Y(b_n) = F_Y(b)\right]$$

En virtud de (7) concluimos que $F_X(b) = F_Y(b)$. Como lo anterior se tiene para cada $b \in D$, de (6) obtenemos que

$$(\forall b \in I\!R) : F_X(b) = F_Y(b)$$

i.e. $F_X = F_Y$.

Problema V.4.4

Demostrar que:

(a) Si $X \sim P(\lambda)$ con $\lambda > 0$ entonces $(\forall t \in I\!R) : \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

(b) Concluya que si X_1, X_2 son v.a. independientes tales que $X_1 \sim P(\lambda_1)$ y $X_2 \sim P(\lambda_2)$ entonces $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

Solución:

(a) En efecto, dado $t \in I\!R$ como X es v.a. discreta se tiene por definición que

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &:= E[cos(tX)] + iE[sen(tX)] = \sum_{k=0}^{+\infty} cos(tk)P[X=k] + i\sum_{k=0}^{+\infty} sen(tk)P[X=k]\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}P[X=k] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

i.e. $(\forall t \in I\!R) : \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

(b) En efecto si X_1, X_2 son v.a. independientes de (a) es claro que

$$\begin{aligned}(\forall t \in I\!R) : \varphi_{X_1+X_2}(t) &= \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

De lo hecho en (a), vemos que la v.a. $X_1 + X_2$ tiene la misma función característica que una v.a. $P(\lambda_1 + \lambda_2)$, luego necesariamente $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Problema V.4.5

Un v.a. X se dice simétrica en torno a cero si $(\forall x \geq 0) : P[X \geq x] = P[X \leq -x]$. Demostrar que:

$$X \text{ es simétrica en torno a cero si y sólo si } (\forall t \in I\!R) : \quad \varphi_X(t) \in I\!R$$

Solución:

Demostremos primero que

(1) $\quad X$ es simétrica en torno a cero ssi $F_X = F_{-X}$

En efecto, si X es simétrica en torno a cero en particular se tiene que

$$(\forall t \in I\!R) : \quad F_X(t) := P[X \leq t] = P[X \geq -t] = P[-X \leq t] =: F_{-X}(t)$$

i.e. $F_X = F_{-X}$. Reciprocamente, si $F_X = F_{-X}$ entonces $(\forall x \geq 0) : F_{-X}(-x) = F_X(-x)$ o equivalentemente $(\forall x \geq 0) : P[-X \leq -x] = P[X \leq -x]$ i.e.

$$(\forall x \geq 0) : P[X \geq x] = P[X \leq -x]$$

luego X es v.a. simétrica en torno a cero, lo que demuestra (1).

De (1), vemos que para demostrar la equivalencia pedida es necesario y suficiente demostrar que:

$$F_X = F_{-X} \Leftrightarrow (\forall t \in I\!R) : \varphi_X(t) \in I\!R$$

En efecto, del problema anterior sabemos que:

$$F_X = F_{-X} \Leftrightarrow \varphi_X = \varphi_{-X} \Leftrightarrow (\forall t \in I\!R) : \varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$$

Como $(\forall t \in I\!R) : \varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$ de las equivalencias anteriores se obtiene finalmente que:

$$F_X = F_{-X} \Leftrightarrow (\forall t \in I\!R) : \varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)} \Leftrightarrow (\forall t \in I\!R) : \varphi_X(t) \in I\!R.$$