Capitulo III:

III.1 Combinatoria

Problema III.1.1

Dado $n \in \mathbb{N}^*$ se define $F_n = \{\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} / \pi$ es función $\}$. Este es el espacio de todas las funciones del conjunto $\{1, ..., n\}$ en si mismo.

Sea $A_k = \{\pi \in F_n / |\{i \in \{1, ..., n\} / \pi(i) = i\}| = k\} \quad \forall k = 0, ..., n$ y $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$

(1) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.

(2) Se escoge una función al azar en F_n, calcular la probabilidad de que dicha función tenga exactamente k puntos fijos con $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Dada $\phi \in F_n$ se dice que i es punto fijo de ϕ si $\phi(i) = i$.

(3) Sea p_n la probabilidad de obtener una función con algún punto fijo al escoger al azar en F_n.
Muestre que $\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{e-1}{e}$

Solución:

(1) Para contar los elementos de A_k, se descompone A_k como una unión disjunta de conjuntos que son mas fáciles de contar.

Primero se consideran todos los subconjuntos de cardinal k del conjunto $\{1, ..., n\}$ que llamamos $\mathcal{C}_k$. Como los elementos que están en A_k tienen exactamente k puntos fijos entonces a cada elemento de A_k le corresponde un solo elemento del conjunto $\mathcal{C}_k$ que será el conjunto de puntos fijos de ese elemento, esto particiona A_k en $|\mathcal{C}_k|$ elementos.

Dado $k \in \{1, ..., n\}$ sea $\mathcal{C}_k = \{C \subseteq \{1, ..., n\} / |C| = k\}$.

Entonces $A_k = \coprod_{C \in \mathcal{C}_k} \{\pi \in F_n / \pi(i) = i \quad \forall i \in C_k \wedge \pi(j) \neq j \ \forall j \in \mathcal{C}_k^c\}$.

Una vez que se ha fijado la posición donde se obtienen los puntos fijos lo único que se puede escoger son los valores que pueden tener las posiciones que no son puntos fijos. Para estas posiciones hay $(n-1)$ posibilidades ya que no puede tener el valor de la posición y como hay $(n-k)$ de estas posiciones es claro que:

$$|A_k| = \sum_{C \in \mathcal{C}_k} (n-1)^{n-k}$$

Para determinar cuantos elementos tiene $\mathcal{C}_k$ basta notar que corresponde a escoger subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n.

Es bien sabido que $|\mathcal{C}_k| = \binom{n}{k}$ por lo tanto $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$

Aplicando el teorema del Binomio de Newton se obtiene que:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k} \cdot 1^k = (n-1+1)^n - \binom{n}{0}(n-1)^n$$

$$\Rightarrow |A| = n^n - (n-1)^n$$

(2) Con todos los calculos obtenidos en la parte anterior solo es necesario notar que A representa a los sucesos favorables y el total de sucesos son los elementos de F_n.

Por lo tanto la probabilidad de obtener exactamente k puntos fijos es:

$$\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}\frac{1}{n^n} = \frac{|A_k|}{|F_n|} \text{ ya que } |F_n| = n^n$$

(3)

$$p_n = \frac{|A|}{|F_n|} = \frac{n^n - (n-1)^n}{n^n} = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \frac{1}{e}$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{e-1}{e} \approx 0.63$.

Problema III.1.2

Una caja contiene $2n$ helados, n de los cuales son de naranja y el resto de frutilla. De un grupo de $2n$ personas $0 < a < n$ prefieren el helado de naranja $0 < b < n$ prefieren el helado de frutilla y el resto no tiene preferencia.
Pruebe que si se distribuyen los helados al azar entre todas las personas la probabilidad de que se respeten las preferencias de todos es:

$$\frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$$

Solución:

Hay $\binom{2n}{n}$ maneras de repartir los dos sabores.

Esto es como repartir un grupo de n en $2n$ lugares sin importar el orden al interior del grupo. Para que todos estén felices hay a personas que deben haber recibido naranja y b personas que deben haber recibido frutilla.

Puedo repartir $(n-a)$ helados de naranja en un grupo de $(2n-a-b)$ personas que no tienen preferencias o lo que es lo mismo $(n-b)$ helados de frutilla en $(2n-a-b)$ personas. En ambos casos esto se logra de:

$$\binom{2n-a-b}{n-a} = \binom{2n-a-b}{n-b}$$

Una vez hecho esto hay 1 sola manera de completar el resto de las preferencias.

Entonces la probabilidad pedida es:

$$\binom{2n-a-b}{n-a} \Big/ \binom{2n}{n} = \binom{2n-a-b}{n-b} \Big/ \binom{2n}{n}$$

Esto debido a que son los casos favorables dividido por los casos posibles.

Problema III.1.3

En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas. Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso con igual probabilidad y sin importar lo que haga el resto de los pasajeros, calcule:

(1) Probabilidad de que m_1 personas se bajen en el primer piso, m_2 en el segundo y así respectivamente con $m_i \in \{0, ..., m\} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$ y $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$.

(2) Probabilidad de que todas las personas se bajen en pisos diferentes.

(3) Probabilidad de que solo 2 personas se bajen en un mismo piso.

Solución:

(1) El número total de distribuciones posibles de personas en los pisos es n^m.

Para obtener la configuración $(m_1, ..., m_n)$. Puedo escoger $\binom{m}{m_1}$ grupos diferentes de m_1 personas para que se bajen en el primer piso.

De los que no se bajaron puedo escoger $\binom{m-m_1}{m_2}$ grupos de m_2 personas para que se bajen en el segundo piso.

Repitiendo este argumento piso por piso concluyo que puedo obtener la configuración deseada de:

$$\binom{m}{m_1} \cdot \binom{m-m_1}{m_2} \cdot \ldots \cdot \binom{m - \sum_{i=1}^{n-1} m_i}{m_n} = \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} \cdot \frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(m - \sum_{i=1}^{n-1} m_i)!}{m_n!}$$

Simplificando términos se tendrá $\frac{m!}{m_1!\cdot...\cdot m_n!}$ maneras de obtener dicha configuración.

Siendo todo equiprobable la respuesta será:

$$\frac{1}{n^m} \cdot \frac{m!}{m_1!...m_n!}$$

En particular esto demuestra que:

$$\sum_{(m_1,...,m_n)\in A} \frac{m!}{m_1!...m_n!} = n^m$$

Siendo $A = \left\{(m_1, ..., m_n) \in \{0, ..., m\}^n / \sum\limits_{i=1}^{n} m_i = m\right\}$
Que es un caso particular del Teorema del Multinomio que asegura que:

$$\sum_{(m_1,...,m_n)\in A} \frac{m!}{m_1!...m_n!} p_1^{m_1}...p_n^{m_n} = (p_1 + ... + p_n)^m \quad \forall (p_i)_{i=1}^{n} \in I\!R^n$$

(2) Para que todos se puedan bajar en pisos diferentes es necesario que $m \leq n$.

(En otras palabras la probabilidad es 0 si $m > n$)

En este caso las configuraciones útiles son 1 bloque de unos de tamaño m y 1 bloque de ceros de tamaño $(n - m)$. Hay exactamente $\binom{n}{m}$ bloques que se pueden obtener de $m!$ maneras. Luego la respuesta es:

$$\frac{\binom{n}{m} \cdot m!}{n^m}$$

(3) Puedo escoger el piso donde se bajarán exactamente 2 personas de n maneras. Tengo que escoger $m - 2$ pisos diferentes para bajar a las $m - 2$ personas restantes. Hay $\frac{m!}{2!}$ maneras de obtener estas configuraciones.

Entonces la respuesta será:

$$\frac{n \cdot \binom{n-1}{m-2} \cdot \frac{m!}{2}}{n^m}$$

III.2 Experimentos Simples

Problema III.2.1

Un zoólogo estaba estudiando el efecto de tres compuestos químicos para curar ganado afectado de cierta infección. Para ésto, de un grupo de n vacas infectadas de igual edad,

peso y coloración seleccionó n_1 a las que aplicó la droga 1, n_2 a las que aplicó la droga 2 y al resto aplicó la droga 3. Lamentablemente el expediente en donde aparecía la droga que suministró a cada vaca fue perdido.
Se le pide que modele probabilísticamente la situación descrita, y conteste:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una vaca al azar, a ella se le haya administrado la droga 1?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una vaca al azar, a ella se le haya administrado una de las drogas 1 o 3?

Solución:

Para modelar probabilísticamente la situación usaremos como e.m. el conjunto Ω de las n vacas infectadas. Es claro que si definimos $(\forall i \in \{1,2,3\}) : V_i$ el subconjunto de Ω que denota las vacas infectadas que recibieron la droga i, entonces

$$\Omega = V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

Del enunciado se desprende que:

$$|V_1| = n_1 \quad , \quad |V_2| = n_2 \quad , \quad |V_3| = n - (n_1 + n_2)$$

El experimento de escoger una vaca al azar en el grupo de las n vacas infectadas, lo podemos modelar como la extracción de un elemento del e.m. Ω.

Dado que cada suceso de la forma $\{\omega\}$ con $\omega \in \Omega$ resulta reelevante para el zoólogo, la σ-álgebra de sucesos de interés viene dado por

$$\mathcal{A} := \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) = \mathcal{P}(\Omega)$$

donde la última igualdad se tiene pues Ω es finito. Del enunciado como las vacas son de igual edad, sexo y coloración no hay motivo para pensar que el zoólogo al escoger al azar una de las vacas se dejará guiar por su recuerdo cuando aplicó la droga. Así en la elección al azar de una vaca "ninguna tiene más chance de ser escogida que otra". Ésto queda bien reflejado con la medida de probabilidad definida por

$$(\forall A \in \mathcal{A}) : \quad P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}$$

ya que entonces $(\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega) : P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/n$.

En el e.m. Ω la afirmación correspondiente a la pregunta (a) tiene asociado el suceso V_1, que según nuestro modelo tiene probabilidad de ocurrir dada por el número:

$$P(V_1) = \frac{|V_1|}{n} = \frac{n_1}{n}$$

Por otro lado la afirmación correspondiente a la pregunta (b) tiene asociado en Ω el suceso $V_1 \cup V_3$, que bajo nuestra modelación tiene probabilidad de ocurrir dada por el número:

$$P(V_1 \cup V_3) = P(V_1) + P(V_3) = \frac{|V_1|}{n} + \frac{|V_2|}{n} = \frac{n_1 + n_2}{n} = 1 - \frac{n_3}{n}.$$

Problema III.2.2

Una caja contiene $2n$ dulces, n de sabor A y n de sabor B. De un grupo de $2n$ personas $a < n$ prefieren el sabor $A, b < n$ prefieren el sabor B y el resto es indiferente. Si los dulces son entregados al azar entre las personas, modele probabilísticamente el experimento y determine la probabilidad de que la preferencia de todas personas sea respetada.

Solución:

Para la confección de un modelo probabilístico para el experimento, supondremos que cada persona tiene en principio asociado un número fijo entre 1 y n de manera tal que: los con número entre 1 y a prefieran el sabor A, los con número entre $(a+1)$ y $(a+b+1)$ prefieren el sabor B y los con número entre $(a+b+2)$ y $2n$ son los indiferentes.

Basados en la suposición anterior, podemos ver el experimento como la extracción de un elemento del e.m.

$$\Omega := \{\omega = (x_1, ..., x_{2n}) \in \{A, B\}^{2n} : \omega \text{ tiene n coordenadas con la letra A} \\ \text{y n coordenadas con la letra B } \}$$

donde el elemento ω extraido se intepreta: "en la coordenada i de ω aparece la letra $x_i \in \{A, B\}$ si el dulce que le toco a la persona con número i es de sabor x_i".

Cada suceso de la forma $\{\omega\}$ con $\omega \in \Omega$ resulta reelevante para la experiencia a realizar, luego la σ-álgebra de sucesos de interés en Ω viene dada por

$$\mathcal{A} := \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) = P(\Omega)$$

donde ésta última igualdad se tiene pues Ω es finito.
Del enunciado, no hay razón para pensar que alguno de los sucesos $\{\omega\}$ con $\omega \in \Omega$ tenga "mayores posibilidades de salir que otro", luego una medida de probabilidad que refleja éste hecho debiera estar dada por

$$(\forall A \in \mathcal{A}) : \quad P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = |A| \binom{2n}{n}^{-1}$$

ya que entonces $(\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega) : P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \binom{2n}{n}^{-1}$.

En el espacio muestral Ω, la afirmación "la preferencia de todas las personas es respetada" tiene asociado el suceso

$$C := \{\omega = (x_1, ..., x_{2n}) \in \Omega : \ x_1 = ... = x_a = A \ , \ x_{a+1} = ... = x_{a+b+1} = B\}$$

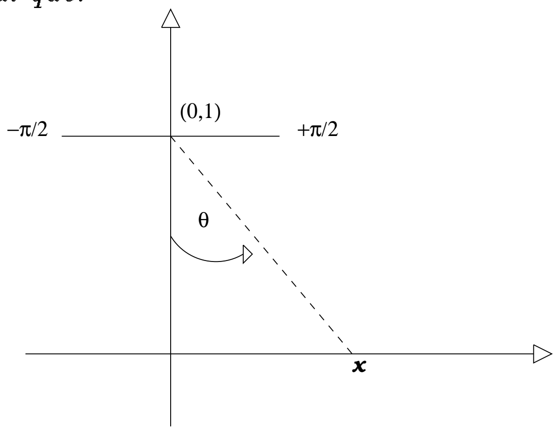
que pertenece a $\mathcal{A}$ pues todo subconjunto de Ω está en $\mathcal{A}$. De acuerdo a nuestro modelo probabilístico, la probabilidad de que ocurra C viene dada por el número

$$P(C) := |C|\binom{2n}{n}^{-1} = \binom{2n-(a+b)}{n-b}\binom{2n}{n}^{-1} = \binom{(n-a)+(n-b)}{n-b}\binom{2n}{n}^{-1}.$$

III.3 Experimentos en $I\!R$

Problema III.3.1

Considere el experimento (E) de escoger un punto al azar en $I\!R$ procediendo de la siguiente manera: se escoge al azar un ángulo $\theta \in]-\pi/2, +\pi/2[$ y a continuación se escoge el punto $x \in I\!R$ tal que:

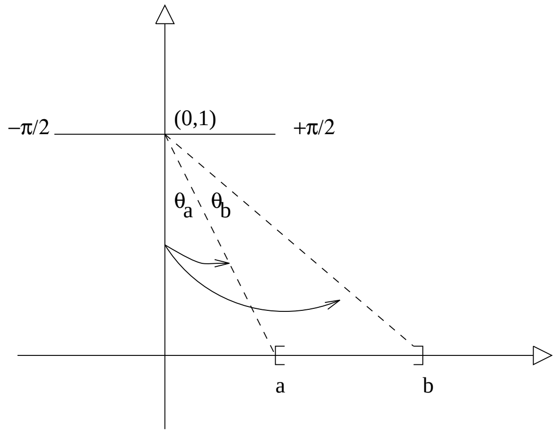


Exhiba un e.m. y una σ-álgebra de sucesos de interés para el experimento (E), y muestre además que un buen modelo probabilístico asignaría para cada $[a,b] \subset I\!R$ la probabilidad

$$P \ (\textit{el punto } x \textit{ pertenece al intervalo } [a,b]) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{1}{1+u^2}du$$

Solución:

Un e.m. natural para el experimento (E) viene dado por el conjunto $\Omega := I\!R$ donde el resultado $\omega = x \in \Omega$ representa el hecho de que el punto escogido es x. La σ-álgebra de sucesos de interés viene dado como es habitual, por $\mathcal{A} := \beta(I\!R)$.
La frecuencia con que el punto x escogido al azar cae en el intervalo $[a, b]$ es igual a la frecuencia con que el ángulo θ cae en el intervalo $[\theta_a, \theta_b]$ donde $\theta_a = arctg(a)$ y $\theta_b = arctg(b)$



En el e.m. Ω el suceso "el punto x pertenece al intervalo $[a, b]$" tiene asociado el conjunto $[a, b] \in \mathcal{A}$. Conforme a lo dicho, una buena medida de probabilidad P definida sobre $\mathcal{A}$ debiera asignar

$$P([a,b]) = \frac{\text{largo } [\theta_a, \theta_b]}{\text{largo } [-\pi/2, +\pi/2]} = \frac{\theta_b - \theta_a}{\pi} = \frac{arctg(b) - arctg(a)}{\pi}$$

y por lo tanto como $(\forall u \in I\!R) : arctg'(u) = \frac{1}{1+u^2}$ del teorema fundamental del cálculo obtenemos que :

$$(\forall [a,b] \in \mathcal{A}) : \quad P([a,b]) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1+u^2} du$$

Problema III.3.2

Suponga que Ud. desea modelar el tiempo de espera para tomar locomoción y que para ésto Ud. sabe que:
(i) *hay una probabilidad no nula de esperar al menos t segundos, para cada $t \in [0, +\infty)$.*
(ii) *la probabilidad de esperar al menos t segundos más dado que ya ha esperado s ,es igual a la probabilidad de haber esperado t segundos al principio.*
(iii) *la probabilidad de que el tiempo de espera sea $+\infty$ es cero.*

Se le pide que:

(a) Exhiba un e.m. Ω para el experimento señalado, y para cada $t \in [0, +\infty]$ determine el subconjunto de Ω asociado al suceso E_t definido por "el tiempo de espera es al menos t".

(b) Interprete probabilísticamente (i), (ii) y (iii) a partir de los sucesos

$$\{E_t : t \in [0, +\infty)\}.$$

(c) Demuestre que si P es una medida de probabilidad definida en la σ-álgebra

$$\mathcal{A} := \sigma(\{E_t : t \in [0, +\infty)\})$$

que verifica lo planteado en (b) entonces $\exists \alpha > 0$ tal que

$$(\forall t \in [0, +\infty)) : \quad P(E_t) = e^{-\alpha \cdot t}$$

(d) Demuestre que si para cada $t \in [0, +\infty)$ el suceso A_t está definido por "el tiempo de espera es menor o igual a t" entonces

$$P(A_t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha \cdot s} ds$$

Solución:

(a) Un espacio muestral natural para el experimento (E) consistente en determinar el tiempo de espera para tomar locomoción viene dado por

$$\Omega := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

donde el resultado del experimento es el elemento $\omega = t \in \Omega$ si el tiempo de espera de locomoción fueron t segundos. Conforme lo anterior se tendrá que

$$E_t = [t, +\infty) \cup \{+\infty\} = [t, +\infty] \quad \text{para todo } t \in [0, +\infty)$$

y además

$$E_\infty = \{+\infty\}$$

(b) Una medida de probabilidad P que refleje (i), (ii) y (iii) debiera verificar que:

(b1) $(\forall t \in [0, +\infty)) : \quad P(E_t) > 0$
(b2) $(\forall t, s \in [0, +\infty)) : \quad P(E_{t+s} | E_s) = P(E_t)$
(b3) $P(E_\infty) = 0$

Dado que si $t, s \geq 0$ entonces $E_{t+s} \subset E_s$ i.e $E_{t+s} \cap E_s = E_{t+s}$, es fácil comprobar que una medida de probabilidad P verifica (b1), (b2) y (b3) si y sólo si verifica simultáneamente:

(b1.1) $(\forall t \in [0, +\infty)): \quad P(E_t) > 0$
(b2.1) $(\forall t, s \in [0, +\infty)): \quad P(E_{t+s}) = P(E_t) \cdot P(E_s)$
(b3.1) $P(E_\infty) = 0$

(c) Para responder ésto nos valdremos del siguiente resultado cuya demostración omitiremos

Lema: Si $\varphi : [0, +\infty) \to I\!R$ es una función tal que

$$.(\forall t \geq 0): \quad \varphi(t) \neq 0$$
$$.(\forall t \geq 0): \quad \varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$$
$$.\varphi \text{ es decreciente}$$

entonces $\exists \alpha \geq 0$ tal que $(\forall t \geq 0): \quad \varphi(t) = e^{-\alpha \cdot t}$.

De existir una medida de probabilidad P definida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ que verifique (b1.1), (b2.1) y (b3.1) se tendrá que podremos definir una función $\varphi : [0, +\infty) \to I\!R$ por

$$(\forall t \geq 0): \quad \varphi(t) := P(E_t)$$

De (b1.1) es directo ver que $(\forall t \geq 0): \quad \varphi(t) \neq 0$; de (b2.1) es claro que si $t, s \geq 0$ entonces $\varphi(t+s) = \varphi(t) \cdot \varphi(s)$; finalmente φ es decreciente pues si $t \geq s$ entonces $E_t \subset E_s$ luego $P(E_t) \leq P(E_s)$ y por lo tanto $\varphi(t) \leq \varphi(s)$. Del lema concluimos que:

$$(\exists \alpha \geq 0)(\forall t \in [0, +\infty)): \quad \varphi(t) = e^{-\alpha t}$$

y por lo tanto

$$(\exists \alpha \geq 0)(\forall t \in [0, +\infty)): \quad P(E_t) = e^{-\alpha t} \tag{c1}$$

Demostremos que $\alpha > 0$. En efecto como

$$E_\infty = \bigcap_{t \in [0, +\infty)} E_t = \bigcap_{n \in I\!N} E_n$$

y además $(\forall n \in I\!N): E_{n+1} \subset E_n$, es claro que:

$$P(E_\infty) = P(\bigcap_{n \in I\!N} E_n) = \lim_n P(E_n) = \lim_n e^{-\alpha \cdot n}$$

por lo tanto de (b3.1) obtenemos que $\lim_n e^{-\alpha \cdot n} = 0$, de donde necesariamente $\alpha > 0$.

(d) Dado $t \in [0, +\infty)$ es claro que $A_t = (E_t)^c \cup \{t\}$ luego:

$$P(A_t) = P(E_t^c) + P(\{t\}) = 1 - P(E_t) + P(\{t\}) \qquad (d1)$$

Pero

$$\begin{aligned} P(\{t\}) &= P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [t - 1/n, t + 1/n[) = \lim_n P([t - 1/n, t + 1/n[) \\ &= \lim_n P(E_{(t+1/n)} - E_{(t-1/n)}) \\ &= \lim_n [P(E_{(t+1/n)}) - P(E_{(t-1/n)})] \\ &= \lim_n [e^{-\alpha(t+1/n)} - e^{-\alpha(t-1/n)}] = 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto de (d1) concluimos que:

$$P(A_t) = 1 - P(E_t) = 1 - e^{-\alpha t} = \int_0^t \alpha e^{-\alpha s} ds$$

lo que demuestra (d).