Capitulo II:

II.1 Probabilididades Condicionales

Problema II.1.1

Pedro quiere enviar una carta a María. La probabilidad de que Pedro escriba la carta es 0.8; la probabilidad de que el correo no la pierda es 0.9 y la probabilidad de que el cartero la entregue es 0.9. Si María no recibió la carta, ¿Cuál es la probabilidad condicional de que Pedro no la haya escrito?

Solución:

Un modelo probabilístico que modele convenientemente la situación descrita, debiera asignar las probabilidades condicionales siguientes:

P (Pedro escribe la carta) $= 0.8$ (1)
P (Correo no pierde la carta | Pedro escribió la carta) $= 0.9$ (2)
P (Cartero entrega la carta | Pedro escribió la carta y el correo no la perdió) $= 0.9$ (3)

Sin importar el e.m. Ω escogido para describir lo sucedido, al definir los sucesos

P_e : "Pedro escribe la carta"
C_0 : "Correo no pierde la carta"
C_A : "Cartero entrega la carta"
M : "María recibe la carta"

de (1), (2) y (3) debiera tenerse que:

$$P(P_e) = 0.8 \tag{4}$$

$$P(C_0|P_e) = 0.9 \tag{5}$$

$$P(C_A|C_0 \cap P_e) = 0.9 \tag{6}$$

Estamos interesados en determinar $P(P_e^c|M^c)$. Claramente

$$M = C_A \cap C_0 \cap P_e \tag{7}$$

luego $\quad M \subset P_e \Leftrightarrow P_e^c \subset M^c \quad$, y por lo tanto se tienen las igualdades:

$$P(P_e^c|M^c) := \frac{P(P_e^c \cap M^c)}{P(M^c)} = \frac{P(P_e^c)}{P(M^c)} = \frac{1 - P(P_e)}{1 - P(M)} \tag{8}$$

De (7) vemos que:

$$P(M) = P(C_A \cap C_0 \cap P_e) = P(C_A|C_0 \cap P_e) \cdot P(C_0|P_e) \cdot P(P_e)$$

y por lo tanto de (4), (5) y (6) concluimos que:

$$P(M) = 0.9 \times 0.9 \times 0.8$$

Finalmente de (8) obtenemos que:

$$P(P_e^c|M^c) = \frac{1 - 0.8}{1 - 0.9 \times 0.9 \times 0.8} = 0,5681...$$

i.e. hay un poco más de un 50% de probabilidad de que Pedro no haya escrito dado que María no la recibió.

Problema II.1.2

Una compañía de seguros clasifica a sus afiliados en tres grupos: bajo, mediano y alto riesgo. Sus estadísticas indican que la probabilidad de que haya implicados en un accidente en cada uno de los grupos es: 0.05 para los de bajo, 0.15 para los de mediano y 0.30 para los de alto riesgo. Si el 20% de los afiliados es de bajo riesgo, el 60% de mediano y el 30% restante de alto,conteste:
Si un asegurado no sufrió durante el último año ningún accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la clase de bajo riesgo?

Solución:

La situación descrita la podemos ver como la extracción al azar de un individuo, dentro de cierta población de personas. Un supuesto implícito es que:

(i) cada persona de la población en cuestión, pertenece a uno y sólo uno de los grupos de riesgo de modo que un 20% de la población está en el de bajo, un 50% en el mediano y el 30% restante en el grupo de alto riesgo.
(ii) si una persona está en un grupo de riesgo, por ejemplo el de bajo, se decide si ésta se accidentará o no durante el año mediante cierto experimento que tiene probabilidad igual a 0.05 de implicar a la persona en un accidente.

Al definir los sucesos

A : "la persona está en el grupo de alto riesgo"
M : "la persona está en el grupo de mediano riesgo"
B : "la persona está en el grupo de bajo riesgo"
C : "la persona sufrió un accidente en el último año"

de (i) obtenemos que si se extrae al azar y de manera equiprobable un individuo de la población, entonces un buen modelo debiera asignar las siguientes probabilidades de ocurrencia:

$$P(A) = 0.3 \ , \ P(M) = 0.5 \ , \ P(B) = 0.2 \tag{1}$$

Por otro lado de (ii) es natural interpretar y modelar las probabilidades condicionales de ocurrencia siguientes:

$$P(C|A) = 0.3 \ , \ P(C|M) = 0.15 \ , \ P(C|B) = 0.05 \tag{2}$$

Del enunciado estamos estamos interesados en calcular la probabilidad condicional $P(B|C^c)$. Para ésto notemos que:

$$P(B|C^c) = \frac{P(C^c|B) \cdot P(B)}{P(C^c)} = \frac{[1 - P(C|B)] \cdot P(B)}{1 - P(C)} \tag{3}$$

De (i) y del teorema de probabilidades totales obtenemos que:

$$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|M) \cdot P(M) + P(C|B) \cdot P(B)$$

lo que por (1),(2) y (3) nos permite deducir que:

$$P(B|C^c) = \frac{(1 - 0.05) \times 0.2}{1 - [0.3 \times 0.3 + 0.15 \times 0.5 + 0.05 \times 0.2]} = 0.2303030...$$

Problema II.1.3

Una jarra contiene n cuadrados en blanco. Una persona saca al azar uno: si está en blanco la marca y luego lo repone, repitiendo ésto hasta sacar uno marcado que es cuando finaliza. Calcule para cada $k \in \{1, ..., n+1\}$ la probabilidad de ocurrencia del suceso "la persona finaliza en la k-ésima extracción".

Solución:

Para responder a las pregunta del enunciado, debemos primero exhibir un espacio probabilístico (Ω, A, P) tal que para todo $k \in \{1, ..., n+1\}$ el subconjunto de Ω asociado a la afirmación "la persona finaliza en la k-ésima extracción" pertenece a la σ-álgebra de sucesos de interés $\mathcal{A}$. Veremos que no es necesario definir un e.m. Ω para poder responder a la pregunta satisfactoriamente.

Dado $i \in \{2, ..., n+1\}$:

¿Qué valor asignaría un buen modelo a la probabilidad de que en la i-ésima extracción sale un cuadrado en marcado (respec. en blanco) dado que hasta la $(i-1)$-extracción han salido cuadrados en blanco?

Definamos para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$ los sucesos

A_i : "hasta la i-ésima extracción han salido cuadrados en blanco"
B_i : "en la i-ésima extracción sale un cuadrado en blanco"
C_i : "en la i-ésima extracción sale un cuadrado marcado"

Bajo el supuesto razonable de que en cada extracción la persona escoge equiprobablemente entre los n-cuadrados de la jarra, para cuando se realize la i-ésima extracción habrán $(i-1)$ cuadrados marcados y $(n-i+1)$ cuadrados en blanco, por lo tanto un buen modelo debiera asignar las probabilidades condicionales:

$$P(\ B_i \mid A_{i-1}\ ) = \frac{n-i+1}{n} \tag{1}$$

$$P(\ C_i \mid A_{i-1}\ ) = \frac{i-1}{n} \tag{2}$$

Como

$$(\forall i = 2, ..., n+1): \quad A_i = B_i \cap ... \cap B_1 \ \wedge \ C_i = B_i^c = B_i^c \cap B_{i-1} \cap ... \cap B_1 \tag{3}$$

de (1), (2) y (3) obtenemos que:

$$(\forall i = 2, ..., n+1): \quad P(B_i|A_{i-1}) = P(B_i|B_{i-1} \cap ... \cap B_1) = \frac{n-i+1}{n} \tag{4}$$

y además

$$(\forall i = 2, ..., n+1): \quad P(C_i|A_{i-1}) = P(B_i^c|B_{i-1} \cap ... \cap B_1) = \frac{i-1}{n} \tag{5}$$

Por otro lado, para el experimento señalado el suceso "el primer cuadrado extraído sale en blanco", siempre ocurre luego un buen modelo asignaria las probabilidades

$$P(B_1) = 1 \quad , \quad P(B_1^c) = 0 \tag{6}$$

La existencia de un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tal que la familia de sucesos $\{C_1, ..., C_{n+1}\} \subset \mathcal{A}$ y se tengan las fórmulas (4), (5) y (6) no es evidente. Existen resultados que permiten abordar éste problema mediante un esquema general de razonamiento. Nosotros omitiremos ésto pues el propósito del presente problema es sensibilizar al lector del hecho, que la interpretación dada a la probabilidad condicional puede ser útil para modelar probabilísticamente un experimento.
Al utilizar entonces las igualdades de (3), y las expresiones (4), (5) y (6) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
P(C_1) &= P(B_1^c) = 0 \\
P(C_2) &= P(B_2^c) = P(B_2^c \cap B_1) = P(B_2^c|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{1}{n} \cdot 1 \\
P(C_3) &= P(B_3^c) = P(B_3^c \cap B_2 \cap B_1) = P(B_3^c|B_2 \cap B_1) \cdot P(B_1) = \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot 1
\end{aligned}$$

Inductivamente se obtiene que dado $k \in \{1, ..., n+1\}$:

$$P(C_k) = \frac{k-1}{n} \cdot \frac{n-(k-2)}{n} ... \frac{n-1}{n} \cdot 1 = \frac{k-1}{n^{k-1}} \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-2))$$

i.e.

$$P(C_k) = \frac{k-1}{n^k} \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!} \qquad \text{para todo } k \in \{1, ..., n+1\}.$$

Problema II.1.4

(a) Dos personas escogen al azar y por separado un número natural entre 1 y n, donde $n \in \mathbb{N}$ está fijo. ¿Cuál es la probabilidad de que los números coincidan?

(b) En cierto concurso participan k personas de la siguiente manera: se escoge al azar un número entre 1 y n_1, que si la primera persona lo adivina gana; si no, se escoge un nuevo número al azar entre 1 y n_2 que si la segunda persona lo adivina gana; y así sucesivamente, finalizando el juego cuando gana una de las personas o pierde la k-ésima.

Los números naturales $n_1, ..., n_k$ están fijos y conocidos en el juego. Considere para cada $i \in \{1, ..., k\}$ el suceso definido por G_i:= "gana la persona i", y responda:

(b1) ¿Qué valor asignaría un buen modelo probabilístico a las probabilidades condicionales

$$P(G_{i+1}|G_i^c \cap ... \cap G_1^c)? \quad \text{donde } i \in \{1, ..., k-1\}.$$

(b2) ¿Qué relación deben verificar los naturales $n_1, ..., n_k$ de forma tal que todos los concursantes tengan igual probabilidad de ganar?

(b3) ¿Cómo escogería $n_1, ..., n_k$ de modo que todos los concursantes tengan igual probabilidad de ganar, pero siempre haya un ganador?

Solución:

(a) Un espacio muestral natural para el experimento señalado es

$$\Omega := \{(i,j) : i,j \in \{1,...,n\}\}$$

con la σ-álgebra de sucesos de interés $\mathcal{A} := P(\Omega)$. Del enunciado no hay razón para pensar que un suceso en Ω de la forma $\{\omega\}$ con $\omega \in \Omega$ tenga más chance de salir que otro, luego como ya es habitual una buena medida de probabilidad que refleja éste hecho viene dada por

$$(\forall A \in \mathcal{A}): \quad P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n^2}$$

El suceso "los números escogidos coinciden" que denotaremos por C, en Ω tiene asociado el conjunto

$$C := \{(i,j) \in \Omega : i = j\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{(k,k)\}$$

luego

$$|C| = n \Rightarrow P(C) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

lo que responde la pregunta (a).

(b) (b1) Sin importar el e.m Ω escogido para describir el concurso señalado, dado $i \in \{1,...,k-1\}$ el conjunto $G_i^c \cap ... \cap G_1^c$ tiene asociado el suceso "hasta el i-ésimo concursante todos han perdido". Sabiendo que ésto ha sucedido, para cuando juege el concursante $(i+1)$ es razonable pensar que sus posibilidades de ganar éstan regidas por un juego como el señalado en (a) donde $n = n_{i+1}$. De éste modo, un buen modelo debiera asignar las probabilidades condicionales:

$$P(G_1) := \frac{1}{n_1} \tag{$b1.1$}$$

$$P(G_{i+1}|G_i^c \cap ... \cap G_1^c) := \frac{1}{n_{i+1}} \quad , (\forall i \in \{1,...,k-1\}) \tag{$b1.2$}$$

(b2) Los números naturales $n_1,...,n_k$ deben ser escogidos de modo que:

$$P(G_1) = P(G_2) = ... = P(G_n) \tag{$b2.1$}$$

Dado $i \in \{2,...,k\}$ es claro que

$$G_i = G_i \cap G_{i+1}^c \cap ... \cap G_1^c$$

luego

$$P(G_i) = P(G_i|G_{i-1}^c \cap ... \cap G_1^c) \cdot ... \cdot P(G_2^c|G_1^c) \cdot P(G_1^c)$$

De (b1.1) y (b1.2) obtenemos que:

$$(\forall i \in \{2,...,k\}) : \quad P(G_i) = \frac{1}{n_i} \cdot \frac{n_{i-1}-1}{n_{i-1}} \cdot ... \cdot \frac{n_2 - 1}{n_2} \cdot \frac{n_1 - 1}{n_1} \tag{b2.2}$$

Para verificar (b2.1) es necesario y suficiente que

$$(\forall i = 1,...,k-1) : P(G_i) = P(G_{i+1}) \tag{b2.3}$$

lo que de acuerdo a (b2.2) se escribe de manera equivalente como

$$(\forall i = 1,...,k-1) : \frac{1}{n_i} = \frac{1}{n_{i+1}} \cdot \frac{n_i - 1}{n_i}$$

y por lo tanto, para que todos los concursantes tengan igual probabilidad de ganar es necesario y suficiente que

$$(\forall i = 1...k-1) : n_{i+1} = n_i - 1 \tag{b2.4}$$

(b3) Para poder asegurar que todos los concursantes tienen igual 'probabilidad de ganar y que siempre haya un ganador, es necesario y suficiente que se verifique (b2.4) y que $P(G_k|G_{k-1}^c \cap ... \cap G_1^c) = 1 \Leftrightarrow n_k = 1,$. Lo anterior equivale a:

$$n_1 := k, n_2 := k-1, ..., n_k := 1$$

Problema II.1.5

Suponga que las condiciones que hacen llover o no en un día cualquiera dependen sólo de las condiciones del tiempo del día inmediatamente anterior. Se sabe que si un día llueve, lloverá al siguiente con probabilidad 0.7; y que si un día no llueve, lloverá al siguiente con probabilidad 0.4. Se le pide que:

(a) Modele probabilísticamente el enunciado.

(b) Sabiendo que hoy no llovió, determine la probabilidad condicional de que si lo haga algún día después.

Solución:

(a) Un e.m. Ω natural para el experimento viene dado por

$$\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}} : \omega_k \in \{0,1\} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$$

donde para $\omega = (\omega_k)_{k\in I\!N} \in \Omega$ se interpreta que $\omega_n = 1$ si el día n llueve y $\omega_n = 0$ si el día n no llueve.

Dado $n \in I\!N$, la afirmación "llueve el día n" tiene asociado en Ω el suceso

$$R_n := \{\omega = (\omega_k)_{k\in I\!N} \in \Omega : \omega_n = 1\}$$

que sin duda es de interés. Por este motivo definimos la σ-álgebra de sucesos de interés dada por

$$\mathcal{A} := \sigma(\{R_n : n \in I\!N\})$$

¿Qué medida de probabilidad P pondremos en $(\Omega, \mathcal{A})$? Obviamente cualquier medida de probabilidad no refleja la información que tenemos del experimento. Debemos modelar los siguientes hechos:

(a1) Si el día n llueve la probabilidad de que llueva el día $(n+1)$ es 0.7
(a2) Si el día n no llueve la probabilidad de que llueva el día $(n+1)$ es 0.4
(a3) las condiciones que hacen o no llover el día $(n+1)$ dependen sólo de las condiciones del tiempo inmediatamente anterior.

Una medida de probabilidad P que refleja (a1) y (a2) debiera asignar los valores

$$(\forall n \in I\!N): \quad P(R_{n+1}|R_n) = 0.7 \tag{$a1.1$}$$

y

$$(\forall n \in I\!N): \quad P(R_{n+1}|R_n^c) = 0.4 \tag{$a2.1$}$$

Por otro lado, dado $n \in I\!N$ lo dicho en (a3) lo podemos interpretar como que el conocimiento de las condiciones de tiempo que hubo entre los días 1 y $(n-1)$ no dice nada de las condiciones del tiempo del día $(n+1)$, que se deciden recién el día n mediante un experimento que se deja regir por lo dicho en (a1) y (a2). De éste modo una probabilidad P que refleja (a3) debiera satisfacer:

$$P[R_{n+1}|R_n^{x_n} \cap ... \cap R_1^{x_1}] = P[R_{n+1}|R_n^{x_n}] \tag{$a3.1$}$$

$$P[R_{n+1}^c|R_n^{x_n} \cap ... \cap R_1^{x_1}] = P[R_{n+1}^c|R_n^{x_n}] \tag{$a3.2$}$$

para todo $n \in I\!N$ y todo $(x_1, ..., x_n) \in \{-1, 1\}^n$, donde se entiende para cada $i \in \{1, ..., n\}$ que:

$$R_i^{x_i} = \begin{cases} R_i & , \quad \text{si } x_i = 1 \\ R_i^c & , \quad \text{si } x_i = -1 \end{cases}$$

La existencia de una tal medida de probabilidad se puede demostrar utilizando resultados que se escapan de los objetivos del presente curso. Nosotros daremos por sentado éste hecho, y como veremos en la parte (b), las identidades (a1.1),(a2.1), (a3.1) y (a3.2) son suficientes para poder asignarle probabilidad a una cantidad no despreciable de sucesos.

(b) Entendiendo que el índice $k = 1$ representa el día de hoy, el suceso A asociado a la afirmación "el día de hoy no llovió" viene dado por $A = R_1^c \in \mathcal{A}$. El suceso B asociado a la afirmación "llueve algún día después de hoy" viene dado por:

$$B = \bigcup_{k \geq 2} R_k \in \mathcal{A}$$

Debemos calcular $P(B|A)$. Para ésto, para cada $k \geq 2$ consideremos el suceso F_k asociado a la afirmación "llueve por primera vez el día k", es claro que

$$(\forall k \geq 2) : F_k = R_k \cap R_{k-1}^c \cap ... \cap R_1^c$$

y por lo tanto dado $k \geq 2$ se tiene que

$$P(F_k) = P(R_k \cap R_{k-1}^c \cap ... \cap R_1^c) = P(R_k | R_{k-1}^c \cap ... \cap R_1^c) \cdot ... \cdot (R_2^c | R_1^c) \cdot P(R_1^c)$$

Al aplicar (a3.1) y (a3.2) obtenemos que:

$$P(F_k) = P(R_k | R_{k-1}^c) \cdot ... \cdot P(R_2^c | R_1^c) \cdot P(R_1^c)$$

de donde por (a1.1) y (a1.2) concluimos que:

$$(\forall k \geq 2) : P(F_k) = 0.4 \times (0.6)^{k-2} \cdot P(R_1^c) \qquad (b1)$$

Finalmente como $A \cap B = \bigcup_{k \geq 2} F_k$ de (b1) obtenemos que:

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{k \geq 2} F_k)}{P(R_1^c)} = \sum_{k \geq 2} \frac{P(F_k)}{P(R_1^c)}$$
$$= \sum_{k \geq 2} 0.4 \times (0.6)^{k-2} = 0.4 \times \sum_{k \geq 0} 0.6^k = \frac{0.4}{1 - 0.6} = 1$$

Problema II.1.6

Sea (E_0) *el experimento consistente en tirar una moneda y escoger un punto al azar en el intervalo* $[0,1]$ *procediendo de la siguiente manera: "Se tira una moneda equilibrada, si sale cara se escoge el punto* $\frac{1}{2}$ *y si sale sello se escoge un punto al azar y equiprobablemente en* $[0,1]$*".*
Se pide que:

(a) *(a1) Defina un espacio muestral* Ω_0 *y una* σ*-álgebra de sucesos de interés* $\mathcal{A}_0$ *para el experimento* (E_0).

(a2) Si P_0 *es una medida de probabilidad definida sobre* $\mathcal{A}_0$ *que modela adecuadamente el experimento* (E_0)*, conteste:*

¿Qué valor asignaria a las probabilidades

P_0 *(sale cara al tirar la moneda) ,*

P_0 *(sale sello al tirar la moneda) ,*

P_0*(el punto pertenece a* $I \mid$ *salió cara al tirar la moneda) y*

P_0*(el punto pertenece a* $I \mid$ *salió sello al tirar la moneda) con* $I \in \beta([0,1])$*? .*

(b) *Basado en el espacio probabilístico* $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$ *modele el experimento* (E) *consistente en determinar el punto del intervalo* $[0,1]$ *que fue escogido en el experimento* (E_0).

(c) *Determine explícitamente la función* $F : [0,1] \to [0,1]$ *definida por*

$$F(x) := \text{ probabilidad de que en } (E) \text{ el punto escogido sea } \leq x.$$

Solución:

(a) (a1) Un e.m. natural para el experimento (E_0) viene dado por

$$\Omega_0 := \{c, s\} \times [0,1]$$

donde el resultado del experimento es el elemento $\omega = (m,t) \in \Omega_0$ si al tirar la moneda salió m y a continuación t fue el punto escogido en $[0,1]$. Una σ-álgebra de sucesos de interés para el experimento viene dada por

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\{\{c\} \times I : I \in \beta([0,1])\} \cup \{\{s\} \times I : I \in \beta([0,1])\})$$

(a2) Denotando por C (respectivamente S) el suceso "en (E_0) al tirar la moneda salió cara" (respectivamente "en (E_0) al tirar la moneda salió sello") es claro que en el e.m. Ω_0 se tiene que:

$$C = \{c\} \times [0,1]$$

$$S = \{s\} \times [0,1]$$

La frecuencia de ocurrencia en el experimento (E_0) de por ejemplo el suceso C, coincide con la frecuencia con que sale cara al tirar la moneda equilibrada, fenómeno que no está condicionado a la posterior elección de un punto en [0,1]. De éste modo es razonable que:

$$P_0(C) = \frac{1}{2} \qquad (a.2.1)$$

$$P_0(S) = \frac{1}{2} \tag{a.2.2}$$

Por otro lado el suceso "el punto escogido en (E_0) pertenece a I" donde $I \in \beta([0,1])$ tiene asociado en Ω_0 el suceso $\{c,s\} \times I \in \mathcal{A}_0$. Sabiendo que al efectuar (E_0) ocurrió el suceso C, la probabilidad de que el punto escogido pertenezca a I es uno si $\frac{1}{2} \in I$ y cero si $\frac{1}{2} \notin I$. Por otro lado sabiendo que ocurrió el suceso S, es razonable pensar que la probabilidad de que el punto escogido pertenezca a I, coincide con la probabilidad de que en un experimento donde se escoge al azar y equiprobablemente un punto en $[0,1]$ éste pertenezca a I. Conforme lo anterior una medida de probabilidad P_0 que modele adecuadamente (E_0) debiera asignar las probabilidades condicionales:

$$P_0(\{c,s\} \times I|C) = \begin{cases} 1 & , \frac{1}{2} \in I \\ 0 & , \frac{1}{2} \notin I \end{cases} = 1_I(\frac{1}{2}) \tag{a2.3}$$

$$P_0(\{c,s\} \times I|S) = \frac{\text{largo } (I)}{\text{largo}([0,1])} = \text{ largo } (I) \tag{a2.4}$$

lo anterior para todo $I \in \beta([0,1])$.

(b) Un e.m. natural para el experimento (E) viene dado por $\Omega := [0,1]$ dotado de la σ-álgebra de sucesos de interés $\mathcal{A} := \beta([0,1])$. Dado un $I \in \beta([0,1])$ se tendrá que la frecuencia con que el punto escogido en (E) pertenece I coincide con la frecuencia con que en el experimento (E_0) ocurre el suceso $\{c,s\} \times I$. De ésto una medida de probabilidad P que modele adecuadamente el experimento (E_0) viene dada por

$$(\forall I \in \mathcal{A}) : \quad P(I) := P_0(\{c,s\} \times I) \tag{b1}$$

De (a2.1), (a2.2), (a2.3) y (a2.4) sale al aplicar la fórmula de Bayes que:

$$\begin{aligned} P_0(\{c,s\} \times I) &= P_0(\{c,s\} \times I|C) \cdot P_0(C) + P_0(\{c,s\} \times I|S) \\ &= \frac{1}{2}\{1_I(\frac{1}{2}) + \text{ largo } (I)\} \end{aligned}$$

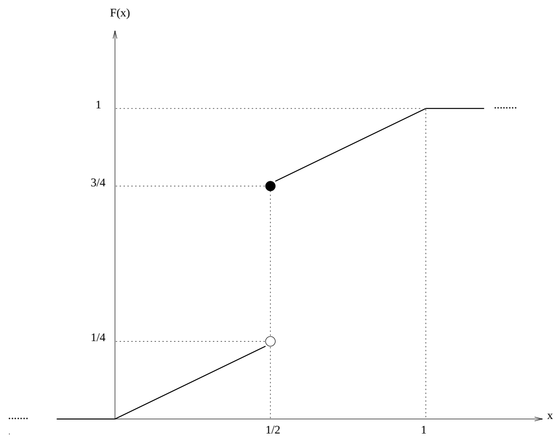
y por lo tanto de (b1) obtenemos que

$$(\forall I \in \mathcal{A}) : \quad P(I) := \frac{1}{2}\{1_I(\frac{1}{2}) + \text{ largo } (I)\} \tag{b2}$$

(c) Dado $x \in [0,1]$ el suceso "el punto escogido en (E) es $\leq x$" tiene asociado en el e.m. Ω el conjunto $[0,x]$. Es claro entonces que

$$(\forall x \in [0,1]) : \quad F(x) = P([0,x]) = \frac{1}{2}\{1_{[0,x]}(\frac{1}{2}) + x\}$$

y por lo tanto



II.2 Teorema de Bayes e Independencia

Problema II.2.1

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $\{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{A}$ una colección de eventos independientes. Demostrar que dado cualquier $(x_1, ..., x_n) \in \{-1, +1\}^n$ la colección de eventos $\{A_1^{x_1}, ..., A_n^{x_n}\}$ son independientes, donde para $i \in \{1, ..., n\}$ se define

$$A_i^{x_i} := \begin{cases} A_i, & si\ x_i = 1 \\ A_i^c, & si\ x_i = -1 \end{cases}$$

Solución:

Claramente basta demostrar que si una colección de eventos es independiente, entonces al reemplazar uno de ellos por su complemento la nueva colección seguirá siendo independiente. De éste modo como $\{A_1, ..., A_n\}$ es independiente también lo será $\{A_1^{x_1}, A_2, ..., A_n\}$ y por lo tanto también lo será $\{A_1^{x_1}, A_2^{x_2}, A_3, ..., A_n\}$, y así sucesivamente hasta concluir que $\{A_1^{x_1}, ..., A_n^{x_n}\}$ son independientes.
Sin perder generalidad demostraremos que:

(1) Si $\{B_1, ..., B_n\}$ son independientes entonces $\{B_1^c, B_2, ..., B_n\}$ son independientes.

En efecto al definir $\tilde{B}_1 := B_1^c, \tilde{B}_2 := B_2, ..., \tilde{B}_n = B_n$ debemos probar que $\{\tilde{B}_1, ..., \tilde{B}_n\}$ son independientes i.e.

$$(\forall I \subset \{1, ..., n\}, I \neq \phi) : P(\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i) = \prod_{i \in I} P(\tilde{B}_i) \tag{2}$$

Para ésto dado $I \subset \{1, ..., n\}$ con $I \neq \phi$ distinguimos dos casos

(Caso A) Si $1 \notin I$ entonces $(\forall i \in I) : \tilde{B}_i = B_i$ luego $P(\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i) = P(\bigcap_{i \in I} B_i)$. Como $\{B_1, ..., B_n\}$ son independientes entonces de lo anterior

$$P(\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i) = \prod_{i \in I} P(B_i) = \prod_{i \in I} P(\tilde{B}_i)$$

(Caso B) Si $1 \in I$ entonces existe $J \subset \{2, ..., n\}$ tal que $I = \{1\} \bigcup J$. Si $J = \phi$ la igualdad de (2) es obvia. Si $J \neq \phi$ entonces:

$$\bigcap_{i \in J} B_i = \left[B_1 \cap (\bigcap_{i \in J} B_i)\right] \cup \left[B_1^c \cap (\bigcap_{i \in J} B_i)\right] = \left[\bigcap_{i \in J \cup \{1\}} B_i\right] \cup \left[\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i\right]$$

luego

$$P(\bigcap_{i \in J} B_i) = P(\bigcap_{i \in J \cup \{1\}} B_i) + P(\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i) \tag{3}$$

Como $\{B_1, ..., B_n\}$ son independientes entonces:

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i \in J} B_i) &= \prod_{i \in J} P(B_i) = \prod_{i \in J} P(\tilde{B}_i) \\ P(\bigcap_{i \in J \cup \{1\}} B_i) &= \prod_{i \in J \cup \{1\}} P(B_i) = P(B_1) \prod_{i \in J} P(\tilde{B}_i) \end{aligned}$$

Al reemplazar éstas igualdades en (3) obtenemos que:

$$P(\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i) = (1 - P(B_1)) \cdot \prod_{i \in J} P(\tilde{B}_i) = P(B_1^c) \cdot \prod_{i \in J} P(\tilde{B}_i) = \prod_{i \in I} P(\tilde{B}_i)$$

lo que demuestra (2).

Dado que (Caso A) y (Caso B) son las dos únicas posibilidades, concluimos la validez de (2), lo que demuestra (1).

Problema II.2.2

Se escribe en cuatro cartulinas los números $1, 2, 3$ *y* 123 *respectivamente y se escoge una de ellas al azar.*

Notaremos por A*,* B *y* C *a los sucesos salió un número que tenía el dígito* $1, 2$ *y* 3 *respectivamente.*

Pruebe que:

(1) A, B, C son independientes 2 a 2.

(2) A, B, C no son independientes.

Solución:

El espacio muestral $\Omega = \{1\} \times \{2\} \times \{3\} \times \{123\}$ con la σ-algebra de las partes.

Al no tener mayor información sobre como se escogen las cartulinas es razonable suponer que:

$$I\!P(\{1\}) = I\!P(\{2\}) = I\!P(\{3\}) = I\!P(\{123\}) = \frac{1}{4}$$

Los sucesos a examinar son:

$$\begin{aligned} A &= \{1\} \times \{123\} \\ B &= \{2\} \times \{123\} \quad \Rightarrow I\!P(A) = I\!P(B) = I\!P(C) = \frac{1}{2} \\ C &= \{3\} \times \{123\} \end{aligned}$$

(1) Es claro que:

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{123\} \Rightarrow I\!P(A \cap B) = I\!P(A \cap C) = I\!P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Como además $I\!P(A) \cdot I\!P(B) = I\!P(A) \cdot I\!P(C) = I\!P(B) \cdot I\!P(C) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow I\!P(A \cap B) = I\!P(A) \cdot I\!P(B) \qquad I\!P(B \cap C) = I\!P(B) \cdot I\!P(C) \qquad I\!P(A \cap C) = I\!P(A) \cdot I\!P(C)$

Es decir son independientes 2 a 2.

(2) Como:

$$A \cap B \cap C = \{123\} \Rightarrow I\!P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq I\!P(A) \cdot I\!P(B) \cdot I\!P(C) = \frac{1}{8}$$

Esto prueba que no son independientes.

Observación:

Esto muestra que independientes 2 a 2 no implica independencia.

Problema II.2.3

Considere el e.m. $\Omega := \{1,2,3,4\}$ *con la* σ*-álgebra de sucesos de interés* $\mathcal{A} := P(\Omega)$ *y la medida de probabilidad* P *definida por*

$$(\forall A \in \mathcal{A}): \quad P(A) := \frac{|A|}{4}$$

Demuestre que si $A := \{1,4\}$, $B := \{2,4\}$ *y* $C := \{1,4\}$ *entonces*

(a) *(a1)* $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
(a2) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
(a3) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

(b) *La colección de sucesos* $\{A, B, C\}$ *no son independientes.*

Solución:

(a) Es claro que $A \cap C = A \cap B = B \cap C = \{4\}$ luego

$$P(A \cap C) = P(A \cap B) = P(B \cap C) = 1/4$$

Como

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

las igualdades de (a1), (a2) y (a3) son evidentes.

(b) En efecto los conjuntos $\{A, B, C\}$ no pueden ser independientes pues $A \cap B \cap C = \{4\}$ pero

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$$

Como conclusión de lo desarrollado vemos que si en una colección los sucesos son independientes dos a dos (i.e. la probabilidad de la intersección de dos sucesos de la colección es igual al producto de las probabilidades de cada uno de éstos) entonces la colección completa no tiene porque ser independiente.

Problema II.2.4

En un programa de televisión 1 de 4 cajas contiene las llaves de un fabuloso auto último modelo y las otras 3 están vacias. El concursante escoge una de las 4 cajas, el animador le ofrece un premio de consuelo si se retira ahora, cosa que el concursante rechaza. De las cajas que el concursante no escogió el animador abre 2 que resultan estar vacías. El animador le ofrece un mejor premio de consuelo por retirarse ahora, el concursante se rehusa pero pide cambiar su elección de caja por la que quedó cerrada de las que no había escogido. ¿ Hizo lo correcto?. Suponga que el animador sabe donde está la llave y quiere mantener el suspenso.

Solución:

Si hizo o no lo correcto solo se verá cuando abran las cajas. La pregunta a responder es cual caja tiene más posibilidades de contener las llaves, la que escogió al principio o la que quedó en el escenario cerrada.

La intuición diría que da lo mismo cualquiera de los dos.

Supongamos que el concursante escogió la caja 1, de 4 cajas numeradas de 1 a 4.

$$\Omega = \{1, ..., 4\} \times \{2,3,4\} \times \{2,3,4\} \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Dado $\omega \in \Omega$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, ω_1 representa el número de la caja donde está la llave, ω_2 y ω_3 representan las elecciones del animador para abrir las cajas restantes.

Obviamente las posibilidades de ganar son 1/4.

$$\text{Sea } A_{ij} = \left\{\omega \in \Omega / (\omega_2 = i \wedge \omega_3 = j) \vee (\omega_2 = j \wedge \omega_3 = i) \wedge \{\omega_1 \in \{1,2,3,4\}/\{i,j\}\}\right\}$$

En palabras A_{ij} es el suceso en que las cajas i,j son las cajas que el animador escoge para abrir.

Obviamente $\{i,j\} \in \{2,3,4\}^2$, sea $k \in \{2,3,4\}$ tal que $i \neq k, j \neq k$. Es decir k será la caja que no escogió el concursante y que queda cerrada.

Sea $B_i = \left\{\omega \in \Omega / \omega_1 = i\right\}$ es decir el suceso en que la caja i es la que contiene las llaves. Supondremos que no hay preferencias entre las cajas i.e. $I\!P(B_i)_=1/4$ $i = 1,2,3,4$

Utilizando la regla de Bayes:

$$I\!P\left(B_k/A_{ij}\right) = \frac{I\!P\left(A_{ij}/B_k\right) \cdot I\!P(B_k)}{\sum\limits_{n=1}^{4} I\!P\left(A_{ij}/B_n\right) \cdot I\!P(B_m)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$$

Es esencial asumir que el animador no abrirá la caja con la llave, si no fuese así y el animador escogiera al azar cualquier caja el mismo cálculo daría:

$$I\!P\left(B_k/A_{ij}\right) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{4\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Observación:

Esto es una extensión del conocido problema de Monty Hall (Selvin 1975) en que se consideran solo 3 cajas y el animador abre una de las dos no escogidas obteniéndose mayor probabilidad al cambiar también en este caso ¿Cuánto más?.

La intuición ha fracasado rotúndamente ya que no pudo incorporar la información de la intención del animador de mantener el suspenso. Vimos que si el animador no sabe donde está la llave y escoge al azar da lo mismo con cual caja se queda el concursante.

Problema II.2.5

Se dispone de 2 urnas que notaremos U_1 y U_2. La urna U_1 contiene n_1 bolas, m_1 de las cuales son blancas. La segunda urna U_2 contiene n_2 bolas, m_2 de las cuales son blancas. Se realiza el siguiente experimento: Se escoge al azar una urna y se extrae al azar una bola.

(1) Calcule la probabilidad de que la bola escogida sea blanca.

(2) Examine el siguiente argumento. El número total de bolas es $n_1 + n_2$ de las cuales hay $m_1 + m_2$ blancas luego (a) vale $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$

¿Es eso correcto?. Si no lo es ¿Es correcto para algunos valores de n_1, n_2, m_1, m_2?

Solución:
(1) El espacio muestral será $\Omega = \{U_1, U_2\} \times \{$ blanco, no blanco $\} = \Omega_1 \times \Omega_2$

Obviamente esto modela, primero la urna escogida y segundo el color de la bola que se saca de la urna ya seleccionada. La σ-algebra será la de las partes.

Sea X la variable aleatoria que modela el color de la bola obtenida al realizar el experimento.

Sin mayores explicaciones sabemos que:

$$\begin{aligned} I\!P\left(X = \text{ blanco}/ \text{ Se escogió la urna } U_1\right) &= \frac{m_1}{n_1} \\ I\!P\left(X = \text{ blanco}/ \text{ Se escogió la urna } U_2\right) &= \frac{m_2}{n_2} \end{aligned}$$

Como no se da mayor información sobre como se seleccionan las urnas asumimos que cualquiera de las dos tiene igual probabilidad. Entonces por probabilidades totales tendremos:

$$I\!P(X = \text{blanco}) = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{1}{2}$$

(2) En principio siendo el espacio no necesariamente equiprobable el argumento no es válido. Sin embargo el valor numérico podría coincidir.

Al imponer $\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (m_1n_2+m_2n_1)(n_1+n_2)=2m_1n_1n_2+2m_2n_1n_2\\
&\Rightarrow m_1n_2^2+m_2n_1^2=m_1n_1n_2+m_2n_1n_2\\
&\Rightarrow m_1n_2(n_2-n_1)=m_2n_1(n_2-n_1)
\end{aligned}$$

Entonces $n_1=n_2$ o bien $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}$.

En otras palabras será correcto cuando el número de bolas sea igual en cada urna o bien cuando la proporción de bolas blancas con respecto al total sea igual en ambas urnas.

II.3 Espacio Producto y Experimentos Independientes

Problema II.3.1

Sean (X,β), (Y,β') espacios con σ-álgebra.
Dado $A\in\beta\otimes\beta'$ definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned}
A_{x\cdot}&=\{y\in Y/(x,y)\in A\}\quad \forall x\in X\\
A_{\cdot y}&=\{x\in X/(x,y)\in A\}\quad \forall y\in Y
\end{aligned}$$

Muestre que $(\forall x\in X):\quad A_{x\cdot}\in\beta'$ y que $(\forall y\in Y):\quad A_{\cdot y}\in\beta$

Solución:

Recordemos que $\beta\otimes\beta'=\sigma(\beta\times\beta')$ es decir la más pequeña de las σ-álgebras que contiene a los elementos de $\beta\times\beta'$.

Primero consideremos $A\in\beta\times\beta'$, es decir $A=A_1\times A_2$ con $A_1\in\beta$ y $A_2\in\beta'$

$$\Rightarrow A_{x\cdot}=\{y\in X/x\in A_1, y\in A_2\}=\begin{cases}\emptyset & \text{si } x\notin A_1\\ A_2 & \text{si } x\in A_1\end{cases}$$

En ambos casos $A_{x\cdot}\in\beta'$
De manera análoga $A_{\cdot y}\in\beta$, pues $A_{\cdot y}=\begin{cases}\emptyset & \text{si } y\notin A_2\\ A_1 & \text{si } y\in A_2\end{cases}$

Ahora dado $A\in\beta\otimes\beta'$ cualquiera $\Rightarrow A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ con $A^\lambda\in\beta\times\beta'$
Esto debido a que $\beta\times\beta'$ es base de $\beta\otimes\beta'$

Es facil verificar que $A_{x\cdot} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A^{\lambda}_{x\cdot}$

Como $A^{\lambda}_{x\cdot} \in \beta' \quad \forall\lambda \in \Lambda \Rightarrow A_{x\cdot} \in \beta'$

De igual modo $A_{\cdot y} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A^{\lambda}_{\cdot y} \in \beta$

Observación: El objetivo de este problema es mostrar como probar un resultado para una σ-álgebra al probarlo solo para una base de esta y luego probar que el resultado se extiende para la unión. Esta es una técnica clásica en Algebra.

Problema II.3.2

Considere el experimento de escoger un punto al azar en el cuadrado $[-A, A] \times [-B, B]$ donde A, B son números reales estrictamente positivos. Se le pide:

(a) Modele el experimento señalado como un experimento producto.
(b) Determine si los sucesos asociados a las afirmaciones:
  (b1) "el punto al azar cae en el eje x"
  (b2) "el punto al azar tiene sus coordenadas estrictamente positivas"
  (b3) "el punto al azar cae en el triangulo de vértices (A, B); $(-A, B)$ y $(-A, -B)$"
  pertenecen o no a la σ-álgebra definida en la parte (a).

Solución:

El experimento (E) consistente en escoger un punto al azar en la región cuadrada $[-A, A] \times [-B, B]$ lo podemos ver como la realización simultánea de dos experimentos: uno el de escoger un punto al azar en el intervalo $[-A, A]$ y otro, consistente en escoger un punto al azar en el intervalo $[-B, B]$.

(a) Si definimos los experimentos

(E_1): "escoger un punto al azar en el intervalo $[-A, A]$ ", que es natural modelarlo con el e.m. $\Omega_1 := [-A, A]$ y la $\sigma-$álgebra boreliana de sucesos de interés $\mathcal{A}_1 := \beta[-A, A]$

, y

(E_2): "escoger un punto al azar en el intervalo $[-B, B]$", que lo modelamos con el e.m. $\Omega_2 := [-B, B]$ y la σ-álgebra boreliana de sucesos de interés $\mathcal{A}_2 := \beta([-B, B])$

el experimento (E) puede ser modelado como el experimento producto $(E_1) \times (E_2)$ dotado del e.m. producto $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$ y de la σ-álgebra producto $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

(b) Dado que:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{U \times V : U \in \mathcal{A}_1, V \in \mathcal{A}_2\})$$

para que un suceso pertenezca a la σ-álgebra producto $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ es suficiente poder expresarlo a partir de sucesos de la familia $\{U \times V : U \in \mathcal{A}_1, V \in \mathcal{A}_2\}$ mediante las operaciones algebraicas de unión numerable, intersección numerable y complementación.

Dado $\omega = (x, y) \in \Omega$ se tendrá que:

$$\omega \text{ hace válida la afirmación (b1) } \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \omega \in [-A, A] \times \{0\}$$

luego la afirmación (b1) tiene asociado en Ω el suceso $B_1 := [-A, A] \times \{0\} \in \mathcal{A}$ pues $[-A, A] \in \mathcal{A}_1$ y $\{0\} \in \mathcal{A}_2$.

Por otro lado dado $\omega = (x, y) \in \Omega$ se tiene también que:

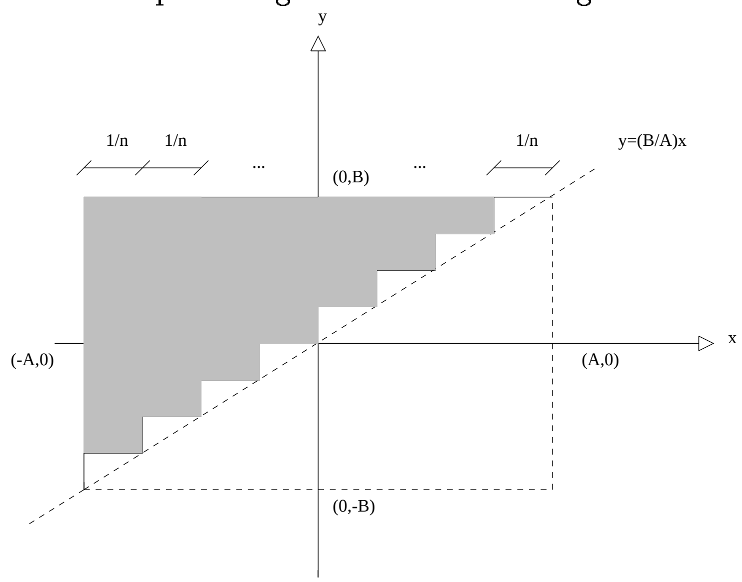
$$\omega \text{ have válida la afirmación (b2) } \Leftrightarrow \left[0 < x \leq A \wedge 0 < y \leq B\right] \Leftrightarrow (x, y) \in]0, A] \times]0, B]$$

luego la afirmación (b2) tiene en Ω asociado el suceso $B_2 :=]0, A] \times]0, B] \in \mathcal{A}$ pues $]0, A] \in \mathcal{A}_1$ y $]0, B] \in \mathcal{A}_2$.

Finalmente, la afirmación (b3) tiene asociado en Ω el suceso

$$B_3 := \{\omega = (x, y) \in \Omega \;\; | \;\; y \geq (\frac{B}{A})x\}$$

que ya no es tan evidente que pertenezca a $\mathcal{A}$. Dado $n \in I\!\!N$ denotemos por A_n al subconjunto de Ω dado por la región achurada de la figura:

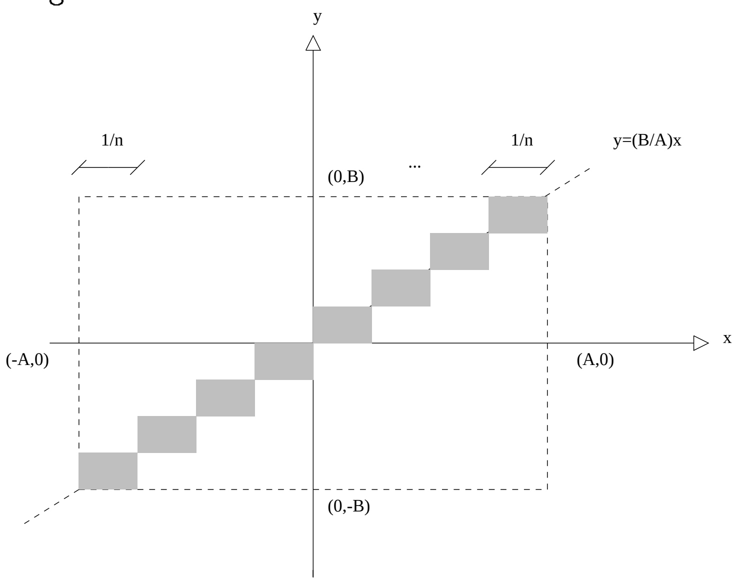


es entonces claro que

(b3.1) $(\forall n \in I\!\!N) : A_n \in \mathcal{A}$

(b3.2) $B_3 = (\bigcup_{n \in I\!N} A_n) \cup \{\omega = (x, y) \in \Omega \mid y = (\frac{B}{A})x\}$.

De (b3.1) podemos concluir $\bigcup_{n \in I\!N} A_n \in \mathcal{A}$, y por lo tanto de (b3.2) es suficiente demostrar que $\{\omega = (x, y) \in \Omega \mid y = (\frac{B}{A})x\} \in \mathcal{A}$ para concluir que $B_3 \in \mathcal{A}$. En efecto, si para cada $n \in I\!N$ denotamos por C_n al subconjunto de Ω dado por el área achurada de la figura:



es claro que

(b3.3) $(\forall n \in I\!N) : C_n \in \mathcal{A}$

(b3.4) $\{\omega = (x, y) \in \Omega \mid y = (\frac{B}{A})x\} = \bigcap_{n \in I\!N} C_n$

De (b3.3) concluimos que $\bigcap_{n \in I\!N} C_n \in \mathcal{A}$ y por lo tanto de la igualdad (b3.4) obtenemos que $\{w = (x, y) \in \Omega | y = (\frac{B}{A})x\} \in \mathcal{A}$ que es lo que necesitabamos.

Problema II.3.3

Considere el experimento de extraer al azar una sucesión de números reales en el intervalo $[-1, +1]$. *Se pide que:*

(a) Modele el experimento señalado como experimento producto de una cantidad numerable de experimentos más sencillos.

(b) Determine si el suceso asociado a la afirmación "la sucesión escogida al azar, converge a cero" pertenece o no a la σ*-álgebra definida en la parte (a).*

Solución:

El experimento (E) consistente en escoger una sucesión al azar en el intervalo $[-1, +1]$ lo podemos ver como la realización simultánea de una cantidad numerable de experimentos, en cada uno de los cuales se escoge al azar un punto del intervalo $[-1, +1]$.

(a) Si para cada $n \in I\!\!N$ definimos el experimento

$$(E_n): \text{ “escoger un punto al azar en el intervalo } [-1,+1]\text{”}$$

que es natural modelarlo con el e.m. $\Omega_n := [-1,+1]$ y la σ-álgebra boreliana $\mathcal{A}_n := \beta([-1,+1])$, el experimento (E) puede ser modelado como el experimento producto $\bigotimes_{n=1}^{\infty} E_n$,es decir, dotado del e.m. producto $\Omega := \bigotimes_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ y de la σ-álgebra producto $\mathcal{A} := \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

(b) Dado que $\mathcal{A} := \sigma(\pi_f)$ donde π_f es la clase de todos los cilindros de Ω, para verificar que el suceso asociado a la afirmación ”la sucesión escogida al azar converge a cero” (que denotaremos por O), pertenece a la σ-álgebra producto $\mathcal{A}$ es suficiente poder expresar el conjunto O a partir de operaciones de unión numerable, intersección numerable y complementación de cilindros de Ω.

Dado $\omega = (x_n)_{n \in I\!\!N} \in \Omega$ se tiene que:

$$\omega \text{ converge a cero } \Leftrightarrow [(\forall m \in I\!\!N)(\exists n \in I\!\!N)(\forall k \geq n) : |x_k| \leq 1/m] \qquad (b1)$$

Definamos para cada $m, k \in I\!\!N$ el suceso:

$$\begin{aligned} A_k^m &:= \{\omega = (x_n)_{n \in I\!\!N} \in \Omega : |x_k| < 1/m\} \\ &= (\bigotimes_{i=1}^{k-1} \Omega_i) \times [-1/m, +1/m] \times (\bigotimes_{i=k+1}^{\infty} \Omega_i) \in \mathcal{A} \end{aligned} \qquad (b2)$$

entonces de (b1) sale que:

$$\omega \text{ converge a cero} \Leftrightarrow [(\forall m \in I\!\!N)(\exists n \in I\!\!N) \text{ tal que } (\forall k \geq n) : \omega \in A_k^m]$$

$$\Leftrightarrow \Big[(\forall m \in I\!\!N) : \omega \in (\liminf_n A_n^m)\Big] \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{m \in I\!\!N} (\liminf_n A_n^m)$$

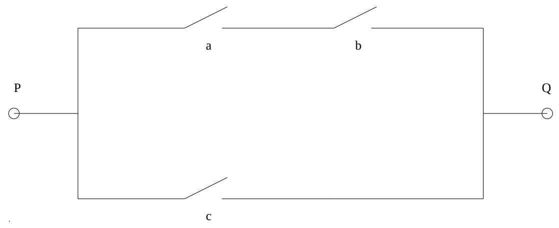
y por lo tanto

$$O = \bigcap_{m \in I\!\!N} (\liminf_n A_n^m) \qquad (b3)$$

Finalmente, de la igualdad en (b2) como $(\forall m, n \in I\!\!N) : A_n^m \in \mathcal{A}$ concluimos que $(\forall m \in I\!\!N) : \liminf_n A_n^m \in \mathcal{A}$ y por lo tanto de (b3) obtenemos que $O \in \mathcal{A}$.

Problema II.3.4

En la figura de abajo a, b, y c representan interruptores cada uno de los cuales puede estar cerrado o abierto (permitiendo o impidiendo el paso de corriente). La probabilidad de que el interruptor $x \in \{a, b, c\}$ esté cerrado es $p \in [0, 1]$ independientemente de como está el resto. Si entre los puntos P y Q se establece una diferencia de potencial, determine la probabilidad de que circule corriente entre P y Q.



Solución:

Modelemos probabilísticamente la situación. La posibilidad o no de que circule corriente entre los puntos P y Q está sujeta al resultado de cada uno de los experimentos (E_a), (E_b) y (E_c), donde para $x \in \{a, b, c\}$: (E_x) consiste en determinar si el interruptor x está abierto o cerrado.

Dado $x \in \{a, b, c\}$ el experimento (E_x) es natural modelarlo con el e.m. $\Omega_x := \{0, 1\}$ dotado de la σ-álgebra $\mathcal{A}_x := \mathcal{P}(\Omega_x)$ y de la medida de probabilidad $P_x : A_x \to [0, 1]$ tal que $P_x(\{1\}) = q$ y $P_x(\{0\}) = 1 - p \equiv q$.

El experimento (E) consistente en realizar los experimentos (E_a), (E_b) y (E_c) lo podemos modelar con el espacio muestral producto $\Omega := \Omega_a \times \Omega_b \times \Omega_c$ y la σ-álgebra producto $\mathcal{A}_x := \mathcal{A}_a \otimes \mathcal{A}_b \otimes \mathcal{A}_c$.

Es implícito del enunciado que:

(1) en el experimento (E) el resultado de por ejemplo el experimento (E_a) se decide sin tomar en cuenta los experimentos (E_b) y (E_c), por lo tanto, sin saber el estado del interruptor $\underline{b}$ y $\underline{c}$, la frecuencia con que el interruptor $\underline{a}$ está cerrado sigue siendo p.
(2) en el experimento (E) el resultado de por ejemplo los experimentos (E_a) y (E_b) no permite modificar (e.d. ni aumentar ni disminuir) la probabilidad de que el interruptor $\underline{c}$ se encuentre abierto o cerrado.

¿Qué medida de probabilidad P definida sobre $\mathcal{A}$ modela adecuadamente (E)?

Definamos en Ω los sucesos

$A :=$ "el interruptor a está cerrado" $(= \{1\} \times \Omega_b \times \Omega_c \in \mathcal{A})$
$B :=$ "el interruptor b está cerrado" $(= \Omega_a \times \{1\} \times \Omega_c \in \mathcal{A})$
$C :=$ "el interruptor c está cerrado" $(= \Omega_a \times \Omega_b \times \{1\} \in \mathcal{A})$

De (1) una buena medida de probabilidad P definida sobre $\mathcal{A}$ debiera asignar:

$$P(A) = P_a(\{1\}) = p \quad , \quad P(A^c) = 1 - P_a(\{1\}) = P_a(\{0\}) = q \tag{1.1}$$

$$P(B) = P_b(\{1\}) = p \quad , \quad P(B^c) = 1 - P_b(\{1\}) = P_b(\{0\}) = q \tag{1.2}$$

$$P(C) = P_c(\{1\}) = p \quad , \quad P(C^c) = 1 - P_c(\{1\}) = P_c(\{0\}) = q \tag{1.3}$$

y de (2) debiera tenerse que además los sucesos

$$\{A, B, C\} \quad \text{son independientes} \tag{2.1}$$

Es fácil determinar una medida de probabilidad sobre $\mathcal{A}$ que verifique (1.1), (1.2), (1.3) y (2.1). En efecto, dado $\omega = (\omega_a, \omega_b, \omega_c) \in \Omega$ es claro que:

$$\{\omega\} = (\{\omega_a\} \times \Omega_b \times \Omega_c) \cap (\Omega_a \times \{\omega_b\} \times \Omega_c) \cap (\Omega_a \times \Omega_b \times \{\omega_c\}) \tag{3}$$

Como

$$\{\omega_a\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = \begin{cases} A \ , & \omega_a = 1 \\ A^c, & \omega_a = 0 \end{cases}$$

$$\{0,1\} \times \{\omega_b\} \times \{0,1\} = \begin{cases} B \ , & \omega_b = 1 \\ B^c, & \omega_b = 0 \end{cases}$$

$$\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{\omega_c\} = \begin{cases} C \ , & \omega_c = 1 \\ C^c, & \omega_c = 0 \end{cases}$$

es evidente de (2.1) que los conjuntos:

$$\{\{\omega_a\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}, \{0,1\} \times \{\omega_b\} \times \{0,1\}, \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{\omega_c\}\}$$

son independientes. De (3) obtenemos que:

$$P(\{\omega\}) = P(\{\omega_a\} \times \Omega_b \times \Omega_c) \cdot P(\Omega_a \times \{\omega_b\} \times \Omega_c) \cdot P(\Omega_a \times \Omega_b \times \{\omega\}) \tag{4}$$

y por lo tanto de (1.1), (1.2) y (1.3) resulta en (4) que

$$(\forall \omega = (\omega_a, \omega_b, \omega_c) \in \Omega) : \quad P(\{\omega\}) = P_a(\{\omega_a\}) \cdot P_b(\{\omega_b\}) \cdot P_c(\{\omega_c\}) \tag{5}$$

Ideas similares a las expuestas en el desarrollo anterior, son las que justifican el hecho de modelar la realización de experimentos independientes, como un experimento producto con la llamada medida de probabilidad producto. De (5) vemos que $P = P_a \otimes P_b \otimes P_c$.

Para finalizar, determinemos la probabilidad de que circule corriente entre los puntos P y Q. Denotemos por I el suceso en Ω asociado a la proposición "circula corriente entre P y Q", es fácil convencerse que:

$$I = (A \cap B) \cup C$$

luego

$$P(I) = P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap B) \cap C)$$

Por lo tanto como $\{A, B, C\}$ son independientes entonces

$$P(I) = P(A)P(B) + P(C) - P(A)P(B)P(C)$$

de donde por $(1.1), (1.2)$ y (1.3) concluimos que:

$$P(I) = p^2 + p - p^3 = p + p^2 - p^3.$$

Problema II.3.5

Considere el experimento (E) de escoger un punto al azar $(\tilde{x}, \tilde{y})$ en $I\!R_+ \times I\!R_+$ procediendo de la siguiente manera: la primera coordenada $\tilde{x}$ es escogida independientemente de la segunda coordenada $\tilde{y}$, cada una en un experimento tal que

$$(\forall A \in \beta(I\!R_+)): \quad P_x(\tilde{x} \in A) = \int_A \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \qquad y \qquad P_y(\tilde{y} \in A) = \int_A \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ son ciertas constantes dadas. Determine la probabilidad de que la primera coordenada del punto escogido sea menor o igual a la segunda.

Solución:

Denotemos por (E_x) y (E_y) a los experimentos consistentes en escoger un punto al azar en $I\!R_+$ modelados con los espacios probabilísticos $(\Omega_x, \mathcal{A}_x, P_x)$ y $(\Omega_y, \mathcal{A}_y, P_y)$ respectivamente, donde

$$\begin{array}{lcl} \Omega_x := I\!R_+ & , & \Omega_y := I\!R_+ \\ \mathcal{A}_x := \beta(\Omega_x) & , & \mathcal{A}_y := \beta(\Omega_y) \end{array}$$

y $P_x : \mathcal{A}_x \to [0,1], P_y : \mathcal{A}_y \to [0,1]$ son las medidas de probabilidad definidas por

$$(\forall A \in \mathcal{A}_x): \quad P_x(A) := \int_A \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx$$

$$(\forall B \in \mathcal{A}_y): \quad P_y(B) := \int_B \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy$$

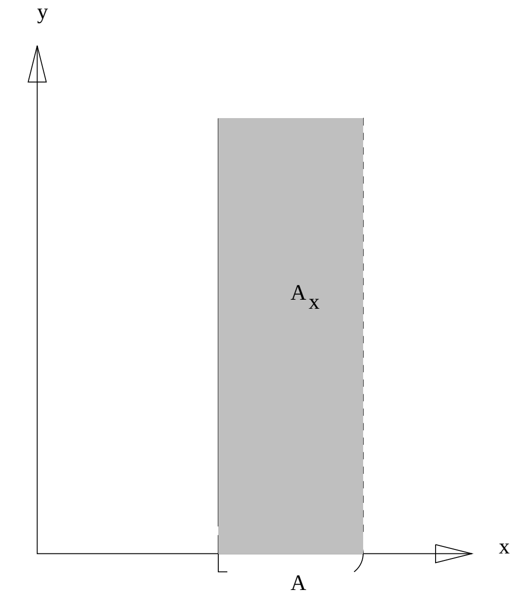
El experimento (E) lo podemos ver como la realización simultánea e independiente de los experimentos (E_x) y (E_y) , por lo tanto, lo podemos modelar con el e.m. producto $\Omega := \Omega_x \times \Omega_y$ y la σ-álgebra producto $\mathcal{A} := A_x \otimes A_y$.

¿Qué medida de probabilidad P definida sobre $\mathcal{A}$ modela adecuadamente (E)?

Dados $A \in \mathcal{A}_x$ y $B \in \mathcal{A}_y$ denotamos por A_x (respec. B_y) al suceso "la primera coordenada está en A" (respec. "la segunda coordenada está en B"). Es claro que:

$$A_x = \{\omega = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega : \tilde{x} \in A\} = A \times \Omega_y \in \mathcal{A}$$
$$B_y = \{\omega = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega : \tilde{y} \in B\} = \Omega_x \times B \in \mathcal{A}$$

y por lo tanto



Es implícito del enunciado que:

(1) en el experimento (E) el resultado de por ejemplo el experimento (E_x) se decide sin tomar encuenta el experimento (E_y) y por lo tanto, la frecuencia con que ocurre A_x en (E) coincide con la frecuencia de ocurrencia de A en (E_x).

(2) en el experimento (E) el conocimiento de donde ha caído la primera coordenada no permite aumentar ni disminuir la probabilidad de que la segunda coordenada pertenezca o no a un conjunto dado. Un razonamiento análogo se tiene para la segunda coordenada.

De (1) una medida de probabilidad P que modele adecuadamente (E) debiera hacer

$$(\forall A \in \mathcal{A}_x) : \quad P(A_x) = P_x(A) \tag{1.1}$$

$$(\forall B \in \mathcal{A}_y) : \quad P(B_y) = P_y(B) \tag{1.2}$$

De (2) debiera tenerse que

$$(\forall A \in \mathcal{A}_x, \forall B \in \mathcal{A}_y) : \quad P(A_x | B_y) = P(A_x) \quad \text{ y } \quad P(B_y | A_x) = P(A_x)$$

o equivalentemente

$$(\forall A \in \mathcal{A}_x, \forall B \in \mathcal{A}_y): \quad P(A_x \cap B_y) = P(A_x) \cdot P(B_y) \tag{2.1}$$

Es fácil determinar una medida de probabilidad P sobre $\mathcal{A}$ que verifique (1.1),(1.2) y (2.1). En efecto, dado $A \in \mathcal{A}_x$ y $B \in \mathcal{A}_y$ se tiene que $A \times B = A_x \cap B_y \in \mathcal{A}$ luego

$$P(A \times B) = P(A_x \cap B_y) = P(A_x) \cdot P(B_y) = P_x(A) \cdot P_y(B)$$

i.e.

$$(\forall A \in \mathcal{A}_x, \forall B \in \mathcal{A}_y): \quad P(A \times B) = P_x(A) \cdot P_y(B) \tag{3}$$

Vemos entonces que P coincide con la medida producto $P_x \otimes P_y$. Para el caso particular que estamos tratando, la fórmula (3) se explicita más aun como:

$$\begin{aligned}(\forall A \in \mathcal{A}_x, \forall B \in \mathcal{A}_y): \quad P(A \times B) &= (\int_A \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx) \cdot (\int_A \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy) \\ &= \int_A \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} d(x,y)\end{aligned} \tag{4}$$

Si bien lo anterior nos explicita una forma de cálculo de la probabilidad P a conjuntos de la forma $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}_x$ y $B \in A_y$, en un curso más avanzado de teoría de la medida se demuestra que existe una única medida de probabilidad P sobre $\mathcal{A}$ que verifica (4) y además ésta viene dada por:

$$(\forall C \in \mathcal{A}): \quad P(C) = \int_C \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} d(x,y) \tag{5}$$

Si denotamos por M al subconjunto de Ω asociado a la proposición “la primera coordenada del punto escogido en menor o igual a la segunda” es claro que:

$$M = \{\omega = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega : \tilde{x} \leq \tilde{y}\}$$

luego de (5) obtenemos que:

$$P(M) = \int_M \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} d(x,y) = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)} dy dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Problema II.3.6

Se escogen dos puntos de manera equiprobable e independientemente en $[0,1]$. Calcule la probabilidad de que estén a una distancia mayor que $d \in [0,1]$, sabiendo que la suma de ambos es menor que 1.

Solución:

El experimento (E) consistente en escoger dos puntos al azar e independientemente en $[0,1]$, lo podemos ver como la realización de dos experimentos independientes digamos (E_1) y (E_2), modelados con los espacios probabilísticos $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ respectivamente donde $\Omega_1 = \Omega_2 = [0,1], \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \beta([0,1])$ y para cada $i \in \{1,2\}$, $P_i : \mathcal{A}_i \to [0,1]$ es la la medida de probabilidad dada por

$$(\forall A \in \mathcal{A}_i): \quad P_i(A) = \frac{\text{largo}(A)}{\text{largo}([0,1])} = \int_A 1 \, dt \tag{1}$$

Como ya es habitual, modelamos el experimento (E) con el e.m. producto $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, la σ-álgebra producto $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y la medida de probabilidad producto $P := P_1 \otimes P_2$. De éste modo

$$(\forall A_1 \in \mathcal{A}_1)(\forall A_2 \in \mathcal{A}_2): \quad P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$$

lo que por (1) se reescribe equivalentemente como

$$(\forall A_1 \in \mathcal{A}_1)(\forall A_2 \in \mathcal{A}_2): \quad P(A_1 \times A_2) = (\int_{A_1} 1 dx)(\int_{A_2} 1 dy) = \int_{A_1 \times A_2} 1 \, d(x,y) \tag{2}$$

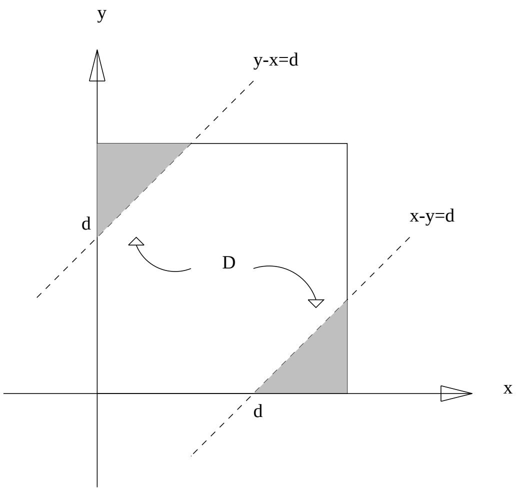
De lo dicho en el problema anterior, la igualdad en (2) es suficiente para poder asegurar que

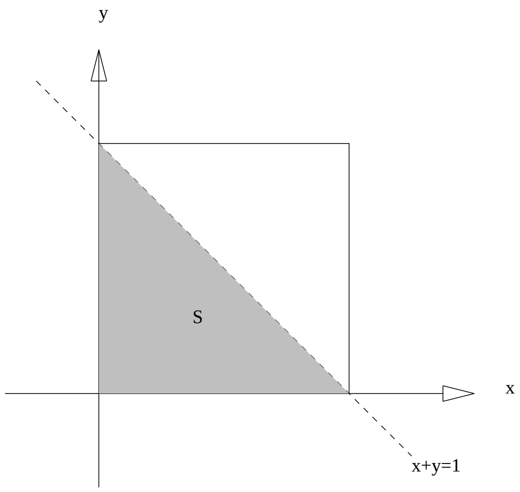
$$(\forall A \in \mathcal{A}): \qquad P(A) = \int_A 1 \, d(x,y) = \text{ área } (A)$$

Denotando por D al suceso en Ω asociado a la afirmación "la distancia entre los puntos escogidos es mayor que D" y por S al suceso asociado a "la suma de ambos números es menor que 1", estamos interesados en calcular $P(D|S)$. Claramente

$$D = \{(x,y) \in \Omega : |x-y| > d\}$$
$$S = \{(x,y) \in \Omega : x+y < 1\}$$

luego





Es claro que:

$$\begin{aligned} \text{área}(D \cap S) &= \frac{1}{2}\ \text{área}\ (D) = \frac{1}{2} \cdot \{\frac{(1-d)^2}{2} + \frac{(1-d)^2}{2}\} = \frac{(1-d)^2}{2} \\ \text{área}(S) &= \frac{1}{2}\ \text{área}\ (\Omega) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego

$$P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{\text{área}(D \cap S)}{\text{área}(S)} = (1-d)^2.$$

Problema II.3.7

Dos damas se ubican al azar en 2 casillas diferentes de un tablero de Ajedrez.

¿Cúal es la probabilidad de que queden amenazadas ?

Solución:

$$\Omega = \{1, ..., 8\}^2 \times \{1, ..., 8\}^2 \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Dados $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad I\!P((\omega_1, \omega_2)) = \frac{1}{64 - 63} \cdot 1\!\!1_{\{\omega_1 \neq \omega_2\}}(\omega_1, \omega_2)$.

El espacio muestral modela el siguiente experimento:

Considerar las coordenadas de cada dama en un tablero de ajedrez de 8 por 8 casillas como valores al azar, asignando igual probabilidad a cualquier par de coordenadas excepto que la segunda dama solo podrá caer en los casilleros que no estén ocupandos por la primera dama, ya que es bien sabido que dos damas no caben en la misma casilla.

Dada la posición de una dama ¿Cuántas casillas amenaza?. Sin saber jugar ajedrez lo único que hay que saber es que una dama amenaza todas sus diagonales y tanto la fila como la columna en que se encuentra. Formalmente:

Sea $A(i,j)$ la cantidad de casillas que amenaza una dama en la posición (i,j) en $i,j \in \{1,...,8\}$. La definicion matemática de $A(i,j)$ será:

$$\begin{aligned} A(i,j) = \Big\{(k,\ell) \in \{1,...,8\}^2 / (i = k \wedge j \neq l) \vee [(k-i) = (l-j) \neq 0] \\ \vee [(i \neq k) \wedge (k = \ell)] \vee [(k-i) = -(l-j) \neq 0]\Big\} \end{aligned}$$

Por simetría en ambos ejes solo es necesario calcular las casillas amenazadas en un cuarto del tablero.Un pequeño cálculo que se obtiene simplemente al contar las diagonales amenazadas, ya que las casillas amenazadas en las direcciones horizontal y vertical son constantes permite obtener el siguiente cuadro.

$A(i,j)$	1	2	3	4
1	21	21	21	21
2	21	23	23	23
3	21	23	25	25
4	21	23	25	27

Consideremos el tablero dividido en cuatro regiones I, II, III, IV donde A_{ij} vale 21,23,25 y 27 respectivamente y que tienen 28,20,12 y 4 elementos respectivamente.

Sea A = "las damas estan amenazadas" y A_λ = "la primera dama cayó en λ" con $\lambda \in \{I, II, III, IV\}$. No es necesario preocuparse por el hecho que estos sucesos estén en la σ-algebra puesto que hemos considerado las partes de Ω como σ-algebra.

Entonces $\Omega = \coprod_{\lambda \in \{I,II,III,IV\}} A_\lambda$

Por probabilidades totales, para calcular la probabilidad de A condicionamos con respecto a los A_λ y obtenemos:

$$\begin{aligned} I\!P(A) =& I\!P\left(A/A_I\right) \cdot I\!P(A_I) + I\!P\left(A/A_{II}\right) I\!P(A_{II}) \\ &+ I\!P\left(A/A_{III}\right) I\!P(A_{III}) + I\!P\left(A/A_{IV}\right) I\!P(A_{IV}) \\ &= \frac{21}{63} \cdot \frac{28}{64} + \frac{23}{63} \cdot \frac{20}{64} + \frac{25}{63} \cdot \frac{12}{64} + \frac{27}{63} \cdot \frac{4}{64} = \frac{13}{36} \approx 0.36\bar{1} \end{aligned}$$

Esto debido a que $I\!P(A_\lambda) = \frac{|\lambda|}{64} \quad \forall \lambda \in \{I, II, III, IV\}$.

Observación:

¿ Es posible resolver el problema para más de dos damas usando el mismo tipo de razonamiento ?. De ser así, el resultado para más de 8 damas debería ser 1, pues es bien sabido que es imposible colocar mas de 8 damas en un tablero de ajedrez sin que estén amenazadas. Mas que utilizar el mismo "modus operandi" sería interesante tratar de utilizar los valores para un número menor de damas para obtener los valores para un número mayor de damas tratando de lograr algún tipo de recursión. Una extensión de este problema es considerar otra pieza del tablero de ajedrez con movimientos muy diferentes como es el caballo.

Problema II.3.8

Dos personas X e Y lanzan un dado equilibrado por turnos de manera independiente entre sí. Esto lo hacen hasta que alguno de ellos obtenga un 6 siendo este el ganador. ¿Cuál es la probabilidad de que gane X?

Solución:

Este es un problema discreto en que no se sabe con certeza cuando termina el juego. La intuición dice que X tiene más posibilidades que Y si comienza primero.

Definamos el espacio muestral:

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ $\qquad \mathcal{F} =$ "cilindros de Ω"

Dado $B \subseteq \Omega$ se podrá escribir como $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n \times ...$ o bien como $\prod\limits_{n\geq 1} B_n$.
Dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$, el valor 0 en el término n-ésimo representa obtener $\{1,2,3,4,5\}$ en el n-ésimo lanzamiento y 1 representa sacar 6 en dicho lanzamiento.
Mas precisamente:

$$x_n = 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 2k & \text{Y sacó 6 en su } k\text{-ésimo lanzamiento} \\ n = 2k+1 & \text{X sacó 6 en su } k\text{-ésimo lanzamiento} \end{cases}$$

Para simplificar la notación un suceso en Ω que fija solo algunas coordenadas se escribirá solo hasta esas coordenadas, por ejemplo:

$$B = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}/x_1 = 1\right\} = \{1\} \times \{0,1\} \times ... \times \{0,1\} \times ... = \{1\}$$

Sea $S =$"Gana X" $\quad \Rightarrow S = \left\{x \in \Omega/\exists k \in \mathbb{N}\, x_n = 0 \quad \forall n \leq 2k \wedge x_{2k+1} = 1\right\}$

De manera equivalente $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{2k}\{0\} \times \{1\}\right)$

Veamos cual es la probabilidad de $\prod_{i=1}^{2k}\{0\} \times \{1\}$ con k fijo.

Por independencia entre lanzamientos esta probabilidad será igual a $(\frac{5}{6})^{2k}\frac{1}{6}$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}$$

Dado $0 < r < 1$ recordemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} + r\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} = \frac{1}{(1-r)(1+r)} = \frac{1}{(1-r^2)}$$

Finalmente:

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

FUENTE : EDUCATED GUESSING
: SAMUEL KUTZ, DONNA F. STROUP

Problema II.3.9

Tres amigos A B y C juegan al cara o sello con una moneda equilibrada de la manera siguiente.

A y B comienzan, C reemplaza al perdedor y se sigue jugando. Siempre el que no juega reemplaza al perdedor, el ganador será aquel que gane 2 veces seguidas.

Construya un espacio muestral adecuado y calcule las probabilidades de ganar de A B y C.

Solución:

$$\Omega = \left\{ (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\} \times \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \Big/ \begin{array}{l} (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (0)_{n\in\mathbb{N}} \cup (1)_{n\in\mathbb{N}} \vee \exists N \in \mathbb{N}^* \\ w_n \neq w_{n+1} \forall n \in \{0,...,N-1\} \\ \forall n, n' \geq N \; w_n = w_n' \end{array} \right\}$$

Dado $w \in \Omega$, $w_n = 0 \Rightarrow$ El jugador A ganó en la etapa n y lo mismo con 1 y 2 para B y C respectivamente.

Para cada $w \in \Omega$ hay un N que lo define en Ω o es alguno de los siguientes elementos, $(0)_{n\in\mathbb{N}} \vee (1)_{n\in\mathbb{N}}$. $N+1$ representa la primera etapa en que hay un ganador si ocurre w.

Por ejemplo si fijo $N = 8$ tendré los siguientes $w \in \Omega$ definidos por este N:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	1	0	2	1	0	2	2
1	2	0	1	2	0	1	2	2

Es decir *solo* C puede ganar en la etapa 8, y en general dado N hay solo 2 $w \in \Omega$ asociados a ese N. (Esto es independiente del valor de N).

A y B pueden ganar en las etapas $(3n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ y $(3n+1)_{n\in \mathbb{N}}$ mientras que C puede ganar solo en las etapas $(3n+2)_{n\in \mathbb{N}}$.

Dado $N \in \mathbb{N}$ es claro que hay solo 2 $w \in \Omega$ que se asocian a ese N, uno que empieza con 1 y otro que empieza con 0. Además las probabilidades de A son las mismas que B. La probabilidad que un suceso termine en la etapa N son $(\frac{1}{2})^{N+1}$.

La posibilidad que gane C será la suma de los sucesos ponderada por sus probabilidades:

$$\sum_{N\in \mathbb{N}} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$

De manera análoga para A y B:

$$\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n\in \mathbb{N}} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$

Al verificar la suma se obtiene:

$$\sum_{n\in \mathbb{N}} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+3}\right] = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 2 - 1 = 1$$

Para calcular $\sum\limits_{n\in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$ notamos que es igual a:

$$\frac{1}{4}\sum_{n\in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{8}\right)^{n} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7} = \frac{2}{7} = \frac{4}{14}$$

Esto muestra que las posibilidades de A o B serán $\frac{1}{2}(1 - \frac{2}{7}) = \frac{5}{14}$.

En consecuencia C tiene un poco menos de posibilidades que A o B por el hecho de no comenzar jugando.

Observación

¿Cuál será el tiempo esperado de juego?

Problema II.3.10

Se tienen 2 urnas U_1, U_2. U_1 contiene 1 bola negra y $N_1 - 1$ bolas blancas. U_2 contiene N_2 bolas blancas. Se extrae una bola de cada urna y se coloca en la otra, esto se hace n veces.
Calcule la probabilidad de que la bola negra esté en U_1 después de n iteraciones. ¿Esta probabilidad tiende a algún valor cuando n tiende a infinito?

Solución:

El espacio muestral $\Omega = U_1 \times (U_1, U_2)^{\mathbb{N}}$
La σ-algebra será la de los cilindros.

Notaremos $A_n = \{w \in \Omega / w_n = U_1\}$ = "En la etapa n la bola negra está en U_1"

Es sencillo ver que $\mathbb{P}(A_0) = 1 \quad \mathbb{P}(A_1) = \frac{N_1-1}{N_1}$.

Para poder hacer los cálculos condicionamos con respecto a los A_n.

Por ejemplo:

$$\mathbb{P}\left(A_{n+1}/A_n\right) = \frac{N_1 - 1}{N_1} \qquad \mathbb{P}\left(A_{n+1}/A_n^c\right) = \frac{1}{N_2} \quad (\forall n > 1)$$

Observación:
Notar que $\mathbb{P}\left(A_{n+1}/A_n\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}/A_n^c\right) \neq 1$ ya que lo que si es cierto es:

$$\mathbb{P}\left(A_{n+1}/A_n\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}^c/A_n\right) = 1$$

Para simplificar notación sea $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ entonces $a_0 = 1, a_1 = \frac{N_1-1}{N_1}$

Los cálculos condicionales se traducen en la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{(N_1 - 1)}{N_1} a_n + \frac{(1 - a_n)}{N_2} \Rightarrow a_{n+1} = a_n \left(1 - \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right) + \frac{1}{N_2}$$

Sea $r = 1 - \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2} \Rightarrow 0 < r < 1$ Al iterar se obtiene:

$$a_{n+1} = r^n \frac{(N_1 - 1)}{N_1} + \frac{1}{N_2}(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) \quad (n > 0)$$

En efecto, utilizando esta definición para a_n:

$$a_{n+1}-a_n r = r^n\frac{(N_1-1)}{N_1}+\frac{1}{N_2}(1+r+...r^{n-1})-r^n\frac{(N_1-1)}{N_1}-\frac{1}{N_2}(r+...+r^{n-1})$$
$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n r=\frac{1}{N_2}$$

Como $1+r+r^2+...+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$

$$\Rightarrow a_{n+1}=r^n\frac{(N_1-1)}{N_1}+\frac{(1-r^n)}{N_2(1-r)}\quad (n\geq 0)$$

Tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{(N_1-1)}{N_1}\lim_{n\to\infty}r^n+\frac{1}{N_2(1-r)}=\frac{1}{N_2(1-r)}=\frac{1}{N_2(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2})}=\frac{N_1}{(N_1+N_2)}$$

Es decir esta probabilidad tiende a la proporción de bolas en U_1 con respecto al total de bolas.

Problema II.3.11

Se tienen dos urnas U_1, U_2, cada una con una bola blanca y una negra. Se extrae una bola de cada urna y se introduce en la otra. Sea p_n, q_n, r_n las probabilidades de que después de n iteraciones haya 2 bolas blancas, una bola blanca y una negra y 2 bolas negras respectivamente en U_1.

(1) Encuentre $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ en función de p_n, q_n, r_n y resuelva la recursión.

(2) Encuentre $\lim_{n\to\infty}p_n$, $\lim_{n\to\infty}q_n$, $\lim_{n\to\infty}r_n$.

Solución:

El espacio muestral es $\Omega=\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ con la σ-algebra de los cilindros de Ω.

0 representa el suceso de obtener 2 bolas blancas, 1 representa obtener una de cada color y 2 representa obtener dos bolas negras.

Sea $A_n=\{w\in\Omega/w_n=0\}$, $B_n=\{w\in\Omega/w_n=1\}$ y $C_n=\{w\in\Omega/w_n=2\}$.

Con un esquema es facil convencerse que:

$\mathbb{P}(A_0)=\mathbb{P}(0)=0$ y $\mathbb{P}(B_0)=1$
$\mathbb{P}(A_1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(C_1)$ y $\mathbb{P}(B_1)=\frac{2}{4}$

Para poder hacer los cálculos condicionamos lo que ocurre en la etapa anterior, es decir:

$$\begin{array}{lll} I\!P\left(A_{n+1}/A_n\right)=0 & I\!P\left(A_{n+1}/B_n\right)=\frac{1}{4} & I\!P\left(A_{n+1}/C_n\right)=0 \\ I\!P\left(B_{n+1}/A_n\right)=1 & I\!P\left(B_{n+1}/B_n\right)=\frac{1}{2} & I\!P\left(B_{n+1}/C_n\right)=1 \\ I\!P\left(C_{n+1}/A_n\right)=\frac{0}{1} & I\!P\left(C_{n+1}/B_n\right)=\frac{1/4}{1} & I\!P\left(C_{n+1}/C_n\right)=\frac{0}{1} \end{array}$$

Aplicando probabilidades totales para A_n, B_n y C_n tendremos que:

$$p_{n+1}=\frac{q_n}{4} \quad q_{n+1}=p_n+\frac{q_n}{2}+r_n \quad r_{n+1}=\frac{q_n}{4}$$

$$\Rightarrow p_{n+1}=r_{n+1} \quad (\forall n\geq 0)$$

Además $p_1=\frac{1}{4}=r_1$ y $q_1=\frac{1}{2}$.

Entonces $q_{n+1}=2p_n+\frac{q_n}{2}, p_{n+1}=\frac{q_n}{4}$ y $r_n=p_n\forall n\geq 0$.

$$\Rightarrow q_{n+1}+2p_{n+1}=2p_n+\frac{q_n}{2}+\frac{q_n}{2}=q_n+2p_n=...=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Esto es equivalente a notar que $p_n+q_n+r_n=1 \quad \forall n\geq 0$.

La recurrencia se despeja como:

$$r_n=p_n \quad q_n=1-2p_n$$

$$p_{n+1}=\frac{1-2p_n}{4}=\frac{1}{4}-\frac{p_n}{2} \text{ con } p_1=\frac{1}{4}$$

Iterando se obtiene:

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$\frac{p_n}{2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-1}{2}\right)^3+...-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right]+\frac{1}{4}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$$

$p_{n+1}+\frac{p_n}{2}=\frac{1}{4}$. Esto prueba que sí se cumple la recursión.

$$\Rightarrow p_{n+1}=\frac{1}{4}\frac{(1-(\frac{-1}{2})^n)}{1-(-1/2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right)^n=\left(\frac{-1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}$$

Las fórmulas para r_n y q_n se obtienen al reemplazar la fórmula para p_n.

Tomado límite obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

Problema II.3.12

Una caja contiene n bolas marcadas de 1 a n. Dos personas X e Y sacan una bola cada uno, uno después del otro. ¿Cuál es la probabilidad de que X haya sacado una bola con un número mayor que el de Y?

Solución:

Supondremos que X e Y sacan bolas al azar de la caja, es decir cualquier bola tiene igual "chance" de salir. Además X no devuelve su bola al sacar Y.

Sin mayores cálculos la intuición dice que X podría tener más posibilidades que Y ya que saca primero.

$\Omega = \{1, ..., n\}^2$. Dado $\omega \in \Omega$, $\omega = (i, j)$ quiere decir "X sacó i" e "Y sacó j" $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$

$$I\!P(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \text{ Esto pues hay una sola bola por número.}$$

Por simplicidad sea X la variable aleatoria que toma el valor obtenido por X e Y la variable aleatoria que toma el valor obtenido por Y. Queremos encontrar $I\!P(X \geq Y)$.

Sabemos que $I\!P(X = Y) = 0$, $I\!P(X > Y) = \sum_{x=1}^{n} I\!P\left(Y < X / X = x\right) I\!P(X = x)$.

Esto porque $\bigcup_{x=1}^{n} (X = x)$ es partición de Ω. (Probabilidades Totales).

Como $\left(Y < X / X = x\right) = \bigcup_{y=1}^{x-1} (Y = y)$ pues Y toma valores discretos. Entonces:

$$I\!P\left(Y < x / X = x\right) = \begin{cases} \sum_{y=1}^{x-1} I\!P(Y = y) & x \in \{2, ..., n\} \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto $I\!P(X > Y) = \sum_{x=2}^{n} \sum_{y=1}^{x-1} I\!P(Y = y) I\!P(X = x)$

$I\!P(X = x) = \frac{1}{n}$ ya que hay n bolas cuando saca X.

$I\!P(Y = y) = \frac{1}{n-1}$ ya que hay $n - 1$ bolas cuando saca Y.

$$I\!P(X > Y) = \sum_{x=2}^{n} \sum_{y=1}^{x-1} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{x=2}^{n} (x - 1) = \frac{n(n-1)}{2(n-1)n} = \frac{1}{2}$$

Siempre recordando que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{i(i+1)}{2}$.

La respuesta es entonces $I\!P(X > Y) = \frac{1}{2}$
Ambos tiene igual posibilidad !!

Un argumento más combinatorial sería contar las combinaciones de elementos de la siguiente forma: Dado $i \in \{1, ..., n\}$. Fijo $\{(i,j)/j > i\}$ que son $(i-1)$ que son los favorables de un total de $n(n-1)$

$$\Rightarrow I\!P(X > Y) = \sum_{i=1}^{n} (i-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 1/2$$

La desventaja de este método es que no sirve, si cambio las probabilidades de obtener una cierta bola mientras que el desarrollo anterior si.

FUENTE: EDUCATED GUESSING
: SAMUEL KUTZ DONNA F.STROUP