Capitulo I :

I.1 Espacios Muestrales y σ-Algebras

Problema I.1.1

Un científico deposita en la superficie de un recipiente cuadrado, que en su interior contiene agua, una particula de polen en el centro. Como es bien sabido, el movimiento de las partículas de agua hará que la partícula de polen se desplace en la superficie del agua de manera aleatoria describiendo así un movimiento aleatorio llamado movimiento browniano. Se pide:

(a) Exhiba un espacio muestral Ω para el experimento recién señalado.
(b) ¿Qué sucesos en Ω tienen asociados las siguientes afirmaciones ?
(b1) "la partícula de polen nunca toca las paredes del recipiente"
(b2) "la partícula de polen permanece en reposo a partir de cierto momento"

Solución:

(a) La idea es definir un conjunto Ω adecuado para describir la trayectoria aleatoria que describe la partícula de polen. Del enunciado se desprende que existe $a > 0$ tal que la superficie cuadrada tiene por lado un largo $2a > 0$, y que la partícula se mueve en el plano definido por la superficie de agua contenida en el recipiente.

Vemos que toda la información relevante para el experimento está disponible, si para cada instante $t \geq 0$ describimos la posición $(x(t), y(t))$ de la partícula de polen, respecto de un sistema cartesiano de ejes paralelos a los lados de la superficie cuadrada de agua en el recipiente y con origen en el centro de la misma. Por otro lado de acuerdo a nuestra experiencia, la aplicación que a $t \to (x(t), y(t))$ es una función continua de $I\!R_+ \cup \{0\}$ en $I\!R^2$, esto pues no "esperamos" observar saltos de posición instantáneas de la partícula de polen.

Es entonces natural definir

$$\Omega := \{\omega = (x(\cdot), y(\cdot)) \quad \text{tq} \quad \omega : I\!R_+ \cup \{0\} \times I\!R_+ \cup \{0\} \to I\!R \text{ es función continua },$$
$$w(0) = (0,0) \quad \wedge \quad (\forall t \geq 0) : \ |x(t)| \leq a \ , \ |y(t)| \leq a\}$$

(b) Para cada una de las afirmaciones (b1) y (b2) debemos encontrar un subconjunto de Ω (que denotaremos por B_1 y B_2 respectivamente) tales que:

$$\omega \in B_1 \Leftrightarrow \omega \text{ hace válida la afirmación (b1)}$$

y

$$\omega \in B_2 \Leftrightarrow \omega \text{ hace válida la afirmación (b2)}$$

(b1) Claramente en el e.m que hemos definido $\omega = (x(\cdot), y(\cdot)) \in \Omega$ hará válida la afirmación (b1) si y solo si

$$(\forall t \geq 0): \ |x(t)| < a \quad \wedge \quad |y(t)| < a$$

luego

$$B_1 = \{\omega = (x(\cdot), y(\cdot)) \in \Omega \ \mid \ (\forall t \geq 0): \ |x(t)| < a \quad \wedge \quad |y(t)| < a\}$$

(b2) Análogamente un $\omega = (x(\cdot), y(\cdot)) \in \Omega$ hará válida la afirmación (b2) si y solo si

$$(\exists T \geq 0) \text{ tal que } (\forall t \geq T): \ x(t) = x(T) \quad \wedge \quad y(t) = y(T)$$

luego

$$B_2 := \{\omega = (x(\cdot), y(\cdot)) \in \Omega \ \mid \ (\exists T \geq 0): \ t \geq T \Rightarrow [x(t) = x(T) \wedge y(t) = y(T)] \ \}$$

Problema I.1.2

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de partes de Ω y $\{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{A}$. Demuestre que cada una de las siguientes afirmaciones tiene asociado un suceso en $\mathcal{A}$ que se expresa a partir de los sucesos $A_1, ..., A_m$:

(a) "ocurre por lo menos uno de los A_i con $i \in \{1, ..., n\}$".
(b) "no ocurre ninguno de los A_i con $i \in \{1, ..., n\}$".
(c) "ocurre uno y sólo uno de los A_i con $i \in \{1, ..., n\}$".

Solución:

Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra i.e. cerrada para uniones e intersecciones numerables y complementación, y además $(\forall i = 1, ..., n) : A_i \in \mathcal{A}$ entonces cualquier conjunto que se exprese a partir de los sucesos $A_1, ..., A_n$ utilizando las operaciones algebraicas señaladas, pertenecerá a la σ-álgebra $\mathcal{A}$.

(a) Dado $\omega \in \Omega$ se tendrá que:

$$\omega \text{ hace válida la afirmación (a) } \Leftrightarrow (\exists i = 1, ..., n) : \omega \in A_i \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

luego la afirmación (a) tiene asociado en Ω el suceso $A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

(b) Dado $\omega \in \Omega$ se tendrá que:

$$\omega \text{ hace válida la afirmación (b) } \Leftrightarrow \omega \text{ no hace válida la afirmación (a)} \Leftrightarrow$$
$$\omega \notin A \quad \Leftrightarrow \quad \omega \in A^c$$

luego la afirmación (b) tienen asociado en Ω el suceso $B := A^c \in \mathcal{A}$, pues $A \in \mathcal{A}$. De las leyes de Morgan sale que $B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i^c)$

(c) Dado $\omega \in \Omega$ se tendrá que:

$$\omega \text{ hace válida la afirmación (c)} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists!\ i = 1, ..., n) : \omega \in A_i \quad \Leftrightarrow$$
$$(\exists i = 1, ..., n) : \ [\omega \in A_i \quad \wedge \quad \forall j \in \{1, ..., n\} - \{i\} : \ \omega \notin A_i] \quad \Leftrightarrow$$
$$(\exists i = 1, ..., n) : \ [\omega \in A_i \wedge \omega \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j^c]$$

luego si definimos para cada $i \in \{1, ..., n\}$ el conjunto

$$B_i := \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j^c \in \mathcal{A}$$

vemos que:

$$\omega \text{ hace válida la afirmación (c) } \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)$$

y por lo tanto la afirmación (c) tiene asociada en Ω el suceso $C := \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)$. Dado que $(\forall i = 1, ..., n) : A_i, B_i \in \mathcal{A}$ concluimos que $(\forall i = 1, ..., n) : A_i \cap B_i \in \mathcal{A}$, lo que nos permite deducir que $C \in \mathcal{A}$.

Problema I.1.3

(a) Sea Ω un e.m. y $\Omega_0 \subset \Omega$. Si $\mathcal{H}$ es una colección de subconjuntos de Ω se define

$$\mathcal{H} \cap \Omega_0 := \{H \cap \Omega_0 \ \ tq\ \ H \in \mathcal{H}\}$$

Demostrar que si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de partes de Ω entonces $\mathcal{A} \cap \Omega_0$ es σ-álgebra de partes de Ω_0.

(b) Suponga que $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ demuestre que:

$$\sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0 = \sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0)$$

.

Solución:

(a) Es evidente que $A \cap \Omega_0 \subset \mathcal{P}(\Omega_0)$ luego para demostrar que $\mathcal{A} \cap \Omega_0$ es σ-álgebra de partes de Ω_0 debemos probar que:

(a1) $\Omega_0 \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$
(a2) $A \in \mathcal{A} \cap \Omega_0 \Rightarrow (\Omega_0 - A) \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$
(a3) $\{A_n\}_{n \in I\!N} \subset \mathcal{A} \cap \Omega_0 \Rightarrow \cup_{n \in I\!N} A_n \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$

En efecto dado que $\Omega_0 = \Omega \cap \Omega_0$ con $\Omega \in \mathcal{A}$ concluimos que $\Omega_0 \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$, lo que demuestra (a1). Si $A \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$ entonces $(\exists B \in \mathcal{A}) : A = B \cap \Omega_0$ luego $(\Omega_0 - A) = B^c \cap \Omega_0$, con $B^c \in \mathcal{A}$ pues $B \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es σ-álgebra, por lo tanto $(\Omega_0 - A) \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$ lo que demuestra (a2).
Finalmente si $\{A_n\}_{n \in I\!N} \subset \mathcal{A} \cap \Omega_0$ entonces $(\forall n \in I\!N)(\exists B_n \in \mathcal{A}) : A_n = B_n \cap \Omega_0$ luego $\cup_n A_n = \cup_n (B_n \cap \Omega_0) = (\cup_n B_n) \cap \Omega_0$, con $(\cup_n B_n) \in \mathcal{A}$ pues $(\forall n \in I\!N) : B_n \in \mathcal{A}$. Concluimos que entonces $\cup_n A_n \in \mathcal{A} \cap \Omega_0$ lo que demuestra (a3).

(b) Supongamos que $\mathcal{H} \subset P(\Omega)$, para demostrar (b) debemos probar que

(b1) $\sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0) \subset \sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0$
(b2) $\sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0 \subset \sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0)$

En efecto como $\sigma(\mathcal{H})$ es una σ-álgebra de partes de Ω, de (a) sale que $\sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0$ es σ-álgebra de partes de Ω_0 y como $\mathcal{H} \cap \Omega_0 \subset \sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0$ concluimos que

$$\sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0) \subset \sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0$$

lo que demuestra (b1). Por otro lado, para verificar (b2) consideremos la colección de subconjuntos de Ω definida por

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : \ A \in \sigma(\mathcal{H}) \quad \wedge \quad A \cap \Omega_0 \in \sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0)\}$$

El lector podrá por un razonamiento parecido al utilizado en (a) demostrar que:

(b2.1) $\mathcal{F}$ es σ-álgebra de parte de Ω

(b2.2) $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$

A partir de (b2.1) y (b2.2) se concluye que $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$ i.e.

$$A \in \sigma(\mathcal{H}) \Rightarrow A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap \Omega_0 \in \sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0)$$

y por lo tanto $\sigma(\mathcal{H}) \cap \Omega_0 \subset \sigma(\mathcal{H} \cap \Omega_0)$, lo que prueba (b2).

Problema I.1.4

Sea $\mathcal{L}$ la colección de todos los intervalos de números reales. Se definen los borelianos de $\mathbb{R}$ como la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

$$\beta(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{L})$$

Demostrar que:

(a) Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $\{x\} \in \beta(\mathbb{R})$.
(b) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto numerable entonces $A \in \beta(\mathbb{R})$.
(c) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que A^c es numerable entonces $A \in \beta(\mathbb{R})$.

Solución:

Dado que $\mathcal{L} \subset \sigma(\mathcal{L})$ i.e. $\mathcal{L} \subset \beta(\mathbb{R})$ y que $\beta(\mathbb{R})$ es una σ-álgebra, para demostrar que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es un boreliano es suficiente demostrar que se escribe a partir de uniones numerables, intersecciones numerables y complementación de intervalos de $\mathbb{R}$.

(a) Demostremos que si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - 1/n, x + 1/n] \tag{a_1}$$

En efecto es claro que $(\forall n \in \mathbb{N}) : x \in [x - 1/n, x + 1/n]$ luego

$$\{x\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - 1/n, x + 1/n]$$

Por otro lado, si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x-1/n, x+1/n]$ entonces $(\forall n \in \mathbb{N}) : y \in [x-1/n, x+1/n]$,es decir, $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq |x - y| \leq 1/n$ de donde como $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ concluimos que $y = x$. Hemos probado así la inclusión

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - 1/n, x + 1/n] \subset \{x\}$$

que junto a la anterior demuestra (a1). De (a1) es fácil concluir que $\{x\} \in \beta(\mathbb{R})$. En efecto como

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : [x - 1/n, x + 1/n] \in \mathcal{L} \subset \beta(\mathbb{R})$$

entonces $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x - 1/n, x + 1/n] \in \beta(\mathbb{R})$ e.d. $\{x\}$ es un boreliano de $\mathbb{R}$.

(b) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto numerable entonces existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de numeros reales tal que

$$A = \{a_1, a_2, ...\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$$

De (a) sabemos que $(\forall n \in I\!N) : \{a_n\} \in \beta(I\!R)$, luego $A = \bigcup_{n \in I\!N} \{a_n\} \in \beta(I\!R)$

(c) Si $A \subset I\!R$ es un conjunto tal que A^c es numerable entonces de (b), sabemos que $A^c \in \beta(I\!R)$ luego $(A^c)^c \in \beta(I\!R)$ i.e. $A \in \mathcal{A}$,lo que demuestra (c).

I.2 Medidas de Probabilidad

Problema I.2.1

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Demuestre que dados $A, B \in \mathcal{A}$ la probabilidad de que exactamente uno de éstos sucesos ocurra viene dada por:

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Solución:

La idea es poder escribir el suceso (que denotaremos por U) asociado a la afirmación "ocurre exactamente uno de los sucesos A o B", utilizando los sucesos A y B de modo que podamos demostrar:

(1) $U \in \mathcal{A}$
(2) $P(U) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Dado $\omega \in \Omega$, es claro que:

ω hace cierta la afirmación "ocurre exactamente uno de los sucesos A o B" $\Leftrightarrow$
$[\ \omega \in (A \setminus B) \quad \vee \quad \omega \in (B \setminus A)\ ] \Leftrightarrow \omega \in (A \triangle B)$

luego el suceso U verifica que:

$$U = A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \tag{3}$$

Dado que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra se tiene que como $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cap B^c, B \cap A^c \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $U = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \in \mathcal{A}$, lo que demuestra (1).

Por otro lado de la igualdad (3) se obtiene que:

$$P(U) = P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) \tag{4}$$

pero $A \cap B^c = A - (A \cap B)$ con $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \in \mathcal{A}$, por lo tanto $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$. Análogamente sale que $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$, de donde por (3) se obtiene que:

$$P(U) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

lo que demuestra (2).

Problema I.2.2

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabilístico y* $\{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{A}$. *Demostrar que*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \phi}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

Solución:

Demostraremos la expresión por inducción en el parámetro n. En efecto si $n = 1$:

$$\sum_{\substack{I \subset \{1\} \\ I \neq \phi}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} A_i) = (-1)^2 P(A_1) = P(A_1) \tag{1}$$

Para finalizar la inducción, debemos demostrar que:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n+1\} \\ I \neq \phi}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} A_i) \tag{2}$$

usando que el resultado es válido para todo $k \leq n$. En efecto, al definir

$$B_1 := A_1, ..., B_{n-1} := A_{n-1}, \quad B_n := A_n \cup A_{n+1}$$

es claro que:

$$\{B_1, ..., B_n\} \subset \mathcal{A} \tag{3}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \tag{4}$$

De (4) y (3), al aplicar la hipótesis de inducción obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) &= \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \phi}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcup_{i \in I} B_i) \\ &= \sum_{I \in \Lambda_1} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} B_i) + \sum_{I \in \Lambda_2} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} B_i) \end{aligned} \tag{5}$$

donde

$$\Lambda_1 := \{I \subset \{1, ..., n\} \text{ tal que } \ n \notin I, I \neq \phi\}$$
$$\Lambda_2 := \{I \subset \{1, ..., n\} \text{ tal que } \ n \in I\}.$$

Si $I \in \Lambda_1$ entonces:
$$P(\bigcap_{i\in I} B_i) = P(\bigcap_{i\in I} A_i) \tag{6}$$

y además si $I \subset \Lambda_2$ entonces

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{i\in I} B_i) &= P\left[(A_n \cap [\bigcap_{i\in I\setminus\{n\}} A_i]) \cup (A_{n+1} \cap [\bigcap_{i\in I\setminus\{n\}} A_i])\right] \\
&= P\left[(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in(I\setminus\{n\})\cup\{n+1\}} A_i)\right] \\
&= \left\{P(\bigcap_{i\in I} A_i) + P(\bigcap_{i\in(I-\{n\}A_i)\cup\{n+1\}} A_i) - P(\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i)\right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

luego al reemplazar (6) y (7) en (5) obtenemos que

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = (-1)^{|I|+1} \cdot \left(\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\notin I, I\neq\phi}} (\bigcap_{i\in I} A_i) + \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\in I}} P(\bigcap_{i\in I} A_i)\right) + \\
\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\in I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in(I-\{n\})\cup\{n+1\}} A_i) + \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\in I}} (-1)^{|I|+2} P(\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i)
\end{aligned} \tag{8}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\notin I, I\neq\phi}} P(\bigcap_{i\in I} A_i) + \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\in I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) &= \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ I\neq\phi}} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \\
&= \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ I\neq\phi, n+1\notin I}} P(\bigcap_{i\in I} A_i)
\end{aligned} \tag{9}$$

y además se tiene las igualdades

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\in I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in(I-\{n\})\cup\{n+1\}} A_i) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ (n+1)\in I, n\notin I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \tag{10}$$

y

$$\sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ n\in I}} (-1)^{|I|+2} P(\bigcap_{i\in I\cup\{n+1\}} A_i) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ (n+1)\in I, n\in I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \tag{11}$$

y por lo tanto al reemplazar (9), (10) y (11) en (8) obtenemos que

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ I\neq\phi,(n+1)\notin I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) + \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ (n+1)\in I, n\notin I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) + \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ (n+1)\in I, n\in I}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i)$$

de donde

$$P(\bigcup_{i\in I}^{n+1} A_i) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n+1\}\\ I\neq\phi}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i\in I} A_i)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Problema I.2.3

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico. Demuestre que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de elementos de $\mathcal{A}$ tales que

$$\lim_n P(A_n) = 1 \quad y \quad \lim_n P(B_n) = p$$

entonces

(a) $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$

(b) $\lim_n P(A_n \cap B_n) = p$

Solución:

(a) Recordemos que si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$. Dado que

$$(\forall m \in \mathbb{N}) : A_m \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

concluimos en particular que

$$(\forall m \in \mathbb{N}) : P(A_m) \leq P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq 1 \qquad (a1)$$

Por lo tanto, como $\lim_m P(A_m) = 1$ de la desigualdad (a1) obtenemos que $1 \leq P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq 1$ i.e. $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$, lo que demuestra (a).

(b) Dados dos conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ sabemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

o equivalentemente

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

De lo anterior resulta en particular que

$$(\forall n \in I\!N) : P(A_n \cap B_n) = P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n) \qquad (b1)$$

Por otro lado, por el mismo argumento usado en (a) se tiene que

$$(\forall n \in I\!N) : P(A_n) \leq P(A_n \cup B_n) \leq 1$$

y por lo tanto, $\lim_n P(A_n \cup B_n) = 1$. Usando ésto en la igualdad (b1) obtenemos que:

$$\lim_n P(A_n \cap B_n) = \lim_n P(A_n) + \lim_n P(B_n) - \lim_n P(A_n \cup B_n),$$

es decir, $\lim_n P(A_n \cap B_n) = 1 + p - 1 = p$ lo que demuestra (b).

I.3 Familia Numerable de Sucesos y Teorema de Borel Cantelli

Problema I.3.1

Sean $\{A_n : n \in I\!N\}$ y $\{B_n : n \in I\!N\}$ una colección de subconjuntos de Ω. Demuestre que:
(a) (a1) $\limsup_n (A_n^c) = (\liminf_n A_n)^c$
(a2) $\liminf_n (B_n^c) = (\limsup_n B_n)^c$
(b) (b1) $(\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n) = \limsup_n (A_n \cup B_n)$
(b2) $(\liminf_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) = \liminf_n (A_n \cap B_n)$.

Solución:

(a) De la definición y al aplicar las llamadas leyes de Morgan sale que:

$$\limsup_n (A_n^c) := \bigcap_{n \in I\!N} \bigcup_{n \geq m} A_n^c = \bigcap_{n \in I\!N} (\bigcap_{k \geq n} A_k)^c = (\bigcup_{n \in I\!N} \bigcap_{k \geq n} A_k)^c = (\limsup_n A_n)^c$$

lo que demuestra (a1). Por otro lado, al aplicar (a1) a la familia de subconjuntos de Ω dada por $\{A_n : n \in I\!N\}$ donde $(\forall n \in I\!N) : A_n := B_n^c$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\limsup_n (A_n^c) = (\liminf_n A_n)^c \Leftrightarrow (\liminf_n B_n^c)^c &= \limsup_n B_n \\ \Leftrightarrow \liminf_n (B_n^c) &= (\limsup_n B_n)^c\end{aligned}$$

lo que demuestra (a2).

(b) Para (b1) debemos verificar que:

(b1.1) $(\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n) \subset \limsup_n (A_n \cup B_n)$
(b2.1) $\limsup_n (A_n \cup B_n) \subset (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)$.

En efecto, es claro que dado $\omega \in \Omega$ se tienen las equivalencias e implicaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\omega \in &(\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n) \Leftrightarrow \left[\omega \in (\limsup_n A_n) \quad \vee \quad \omega \in (\limsup_n B_n)\right] \\ &\Leftrightarrow [(\exists \text{ infinitos } n \in I\!N : \omega \in A_n) \quad \vee \quad (\exists \text{ infinitos } n \in I\!N : \omega \in B_n)] \\ &\Rightarrow [\exists \text{ infinitos } n \in I\!N : \omega \in (A_n \cup B_n)] \\ &\Leftrightarrow \omega \in \limsup_n (A_n \cup B_n)\end{aligned}$$

Hemos así demostrado que:

$$\omega \in (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n) \Rightarrow \omega \in \limsup_n (A_n \cup B_n)$$

i.e.

$$(\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n) \subset \limsup_n (A_n \cup B_n)$$

lo que prueba (b1.1). Por otro lado, dado $\omega \in \Omega$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup_n (A_n \cup B_n) &\Leftrightarrow (\exists \text{ infinitos } n \in I\!N : \omega \in A_n \cup B_n) \\ &\Leftrightarrow card\{n \in I\!N : \omega \in A_n \cup B_n\} = \infty\end{aligned} \tag{$b1.2.1$}$$

Pero de la igualdad:

$$\{n \in I\!N : \omega \in A_n \cup B_n\} = \{n \in I\!N : \omega \in A_n\} \cup \{n \in I\!N : \omega \in B_n\}$$

como el conjunto $\{n \in I\!N : \omega \in A_n \cup B_n\}$ es infinito, necesariamente uno de los conjuntos $\{n \in I\!N : \omega \in A_n\}$ o $\{n \in I\!N : \omega \in B_n\}$ debe ser de cardinal infinito, luego de (b1.2.1) obtenemos que:

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup_n (A_n \cup B_n) &\Rightarrow [card\{n \in I\!N : \omega \in A_n\} = +\infty \vee card\{n \in I\!N : \omega \in B_n\} = \infty] \\ &\Leftrightarrow \left[\omega \in (\limsup_n A_n) \ \vee \ \omega \in (\limsup_n B_n)\right] \\ &\Leftrightarrow \omega \in (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)\end{aligned}$$

Con lo anterior se ha probado que:

$$\omega \in \limsup_n (A_n \cup B_n) \Rightarrow \omega \in (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)$$

i.e.

$$\limsup_n (A_n \cup B_n) \subset (\limsup_n A_n) \cup (\limsup_n B_n)$$

lo que demuestra (b1.2). De (b1.1) y (b1.2) obtenemos la validez de (b1).

Finalmente al aplicar (b1) a las colecciones : $\{A_n^c : n \in I\!N\}$ y $\{B_n^c : n \in I\!N\}$ obtenemos que:

$$(\limsup_n A_n^c) \cup (\limsup_n B_n^c) = \limsup_n (A_n^c \cup B_n^c)$$

Al complementar ambos lados de la igualdad anterior se obtiene de (a) que:

$$\{(\limsup_n A_n^c)^c\} \cap \{(\limsup_n B_n^c)^c\} = \{\limsup_n (A_n^c \cup B_n^c)\}^c$$

y por lo tanto de (a2) podemos escribir

$$\{\liminf_n (A_n^c)^c\} \cap \{\liminf_n (B_n^c)^c\} = \liminf_n (A_n^c \cup B_n^c)^c$$

lo que equivale a:

$$(\liminf_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) = \liminf_n (A_n \cap B_n).$$

Problema I.3.2

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un e.p. y* $\{A_n\}_{n \in I\!N} \subset \mathcal{A}$. *Demostrar que:*

$$P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n) \leq \limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n)$$

Solución:

En efecto como

$$\liminf_n P(A_n) := \sup_n \inf_{k\geq n} P(A_k) \leq \limsup_n P(A_n) := \inf_n \sup_{k\geq n} P(A_k)$$

para concluir es necesario y suficiente demostrar:

(1) $\limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n)$

(2) $P(\liminf_n PA_n) \leq \liminf_n (A_n)$.

Dado $n \in I\!N$ es claro que $(\forall m \geq n) : P(A_m) \leq P(\bigcup_{k\geq n} A_k)$, y por lo tanto

$$(\forall n \in I\!N) : \sup_{k\geq n} P(A_k) \leq P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \tag{3}$$

Por otro lado $P(\limsup_n A_n) = P(\lim_n \uparrow \bigcup_{k\geq n} A_n) = \lim_n P(\bigcup_{k\geq n} A_k)$ luego de (3) obtenemos que:

$$P(\limsup_n A_n) \geq \lim_n \left[\sup_{k\geq n} P(A_k)\right] = \inf_n \left[\sup_{k\geq n} P(A_k)\right] = \liminf_n P(A_n)$$

lo que demuestra (1).

Para demostrar (2), concideremos la colección de sucesos $\{A_n^c\}_{n\in I\!N} \subset \mathcal{A}$. De (1) obtenemos que:

$$\limsup_n P(A_n^c) \leq P(\limsup_n A_n^c) \tag{4}$$

Como

$$\begin{aligned}\limsup_n P(A_n^c) &= \limsup_n [1 - P(A_n)] = 1 + \limsup_n [-P(A_n)] \\ &= 1 - \liminf_n P(A_n)\end{aligned}$$

y además

$$P(\limsup_n A_n^c) = P([\liminf_n A_n]^c) = 1 - P(\liminf_n A_n)$$

de (4) concluimos que:

$$1 - \liminf_n P(A_n) \leq 1 - P(\liminf_n A_n)$$

i.e.

$$P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n)$$

lo que demuestra (2).

Problema I.3.3

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio probabístico y* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ *tal que:*

$$P(\limsup_n A_n) = 1 \quad y \quad P(\liminf_n B_n) = 1$$

Demostrar que:

$$P\left[\limsup_n (A_n \cap B_n)\right] = 1$$

Solución:

Al extraer al azar un elemento $\omega \in \Omega$ mediante la ley de probabilidad P del enunciado, vemos que con probabilidad uno ω estará en una infinidad de los A_n's y aparecerá en todos los B_n's a partir de cierto momento. De este modo, ω estará en una infinidad de los $(A_n \cap B_n)$'s , lo que por lo anterior y al menos intuitivamente debiera tener probabilidad uno de ocurrir.

Primero demostraremos que:

$$(\limsup_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) \subset \limsup_n (A_n \cap B_n) \tag{1}$$

En efecto, dado $\omega \in \Omega$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\omega \ \in (\limsup_n A_n) \ \cap \ (\liminf_n B_n) \ &\Leftrightarrow \ \left[\omega \in \limsup_n A_n \quad \wedge \quad \omega \in \liminf_n B_n\right] \\
&\Leftrightarrow card\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} = \infty \quad \wedge \quad (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k) : \omega \in B_n \\
&\Leftrightarrow card\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n \wedge n \geq k\} = \infty \quad \wedge \quad (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k) : \omega \in B_n \\
&\Rightarrow card\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n \wedge \omega \in B_n\} = \infty \\
&\Leftrightarrow card\{n \in \mathbb{N} : \omega \in (A_n \cap B_n)\} = \infty \\
&\Leftrightarrow \omega \in \limsup_n (A_n \cap B_n)
\end{aligned}$$

Hemos probado así que:

$$\omega \in (\limsup_n A_n) \cap (\liminf_n B_n) \Rightarrow \omega \in \limsup_n (A_n \cap B_n)$$

lo que demuestra (1).
Como además $(\forall n \in \mathbb{N}) : A_n, B_n \in \mathcal{A}$ entonces $(\forall n \in \mathbb{N}) : A_n \cap B_n \in \mathcal{A}$ luego $\limsup_n (A_n \cap B_n) \in \mathcal{A}$, y por lo tanto de (1) concluimos que:

$$P\left[(\limsup_n A_n) \cap (\liminf_n B_n)\right] \leq P\left[\limsup_n (A_n \cap B_n)\right] \leq 1 \tag{2}$$

Pero si $A, B \in \mathcal{A}$ y además $P(A) = 1, P(B) = 1$ entonces $P(A \cap B) = 1$. En efecto, sabemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Como $A \subset A \cup B$ y $P(A) = 1$ entonces $P(A \cup B) = 1$ y por lo tanto de la igualdad anterior concluimos que:

$$P(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$$

En nuestro caso particular al definir $A := \limsup_n A_n \in \mathcal{A}$ y $B := \liminf_n B_n \in \mathcal{A}$, como $P(A) = 1$ y $P(B) = 1$ de (2) concluimos que:

$$1 = P(A \cap B) \leq P\left[\limsup_n (A_n \cap B_n)\right] \leq 1$$

i.e.

$$P\left[\limsup_n (A_n \cap B_n)\right] = 1.$$

Problema I.3.4

Sea $a_n = \frac{a_{n+1}+a_{n-2}}{2} \quad \forall n \geq 1 \ a_0 = 1 \ a_{-1} = 0.$
Se saca al azar un número de $[0,1]$ *en etapas correlativas con el índice de la sucesión* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Calcule la probabilidad de que el número escogido en la etapa n *esté fuera del intervalo formado por* a_{n-1} *y* a_n *un número infinito de veces.*

Solución:

La pregunta a responder es, ¿ Cual es la probabilidad de generar una sucesión de números que satisfaga un suceso?, cuando este depende del índice de la sucesión, un número infinito de veces. Se tiene una definición recursiva de la sucesión y el dominio donde se obtienen los números pero no la ley de las extracciones. Supondremos que la ley será uniforme en $[0,1]$ e independiente entre extracciones.
Aplicaremos el lema de Borel cantelli convergente, pero primero definamos el espacio muestral:

$\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$
Sea $A_N = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega / x_N \in [a_N, a_{N-1}]\}$ con $N \in \mathbb{N}$

Queremos calcular $\mathbb{P}\left[\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists N \geq n \quad x_N \in A_N^c\} \right]$

Esto equivale a:

$$I\!P\left[\bigcap_{n\in I\!N}\bigcup_{m\geq n} A_m^c\right] = I\!P\left[\limsup_n A_n^c\right] = I\!P[\{\liminf_n A_n\}^c] = 1 - I\!P[\liminf_n A_n]$$

Acotemos la suma de la probabilidad de los A_n.

La probabilidad de A_n es proporcional al tamaño del intervalo que lo define, por lo tanto $I\!P(A_n) = |a_n - a_{n-1}|$.

Mas precisamente veamos si $\sum_{n\in I\!N} I\!P(A_n) < \infty$
Para esto observemos que:

$$|a_n - a_{n-1}| = |\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{2} - a_{n-1}| = \frac{|a_{n-1} - a_{n-2}|}{2} = \cdots = \frac{|a_0 - a_1|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 1$$

Esto implica que:

$$\sum_{n\geq 1} I\!P(A_n) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$$

Al aplicar el lema de Borel Cantelli convergente concluimos,

$$I\!P(\limsup_n A_n) = 0 \Rightarrow I\!P(\liminf_n A_n) = 0$$

Por lo tanto $I\!P(\limsup_n A_n^c) = 1$.
Es decir, la probabilidad de estar fuera del intervalo infinitas veces es 1.

Observación: Se puede resolver la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ explícitamente suponiendo que a_n tiene la forma $a_n = r^n \quad \forall n \geq 1$
En un contexto más general, es decir con una familia de intervalos cualquiera, para que el suceso siga teniendo probabilidad 1 debe ser cada vez mas difícil caer en el intervalo. Para lograr esto el tamaño de los intervalos debe decrecer y para poder utilizar Borel Cantelli los intervalos deben decrecer geométricamente.