Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos	**29 de Junio, 2006**

Resumen No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: A. Contreras, R. Cortez*

1. Distribución Conjunta de Variables Aleatorias (contin.)

Definición 1 [Variables Aleatorias Independientes] *Se dice que $X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias independientes si para todo $A_1,\ldots,A_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\{X_1 \in A_1\},\ldots,\{X_n \in A_n\} \in \mathcal{F}$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\{X_i \in A_i\}\right).$$

Una colección infinita de variables aleatorias se dice independiente si cualquier subcolección finita de ellas es independiente.

Lema 1 *$X_1,\ldots,X_n$ son independientes sí y sólo si $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t_i)$.*

Corolario 1 *$X_1,\ldots,X_n$ son variables aleatorias independientes sí y sólo si*

- $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(a_i)$ *para todo $\vec{a} \in S_{X_1,\ldots,X_n}$ en el caso que $X_1,\ldots,X_n$ sean conjuntamente discretas.*
- $f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)$ *para todo $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$ en el caso que $X_1,\ldots,X_n$ sean conjuntamente continuas.*

Lema 2 *Sea $I \subseteq \mathbb{N}$. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes y para todo $i \in I$ la función $g_i : D_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}\left(\{X_i \in D_i\}\right) = 1$ e $Y_i = g_i(X_i)$ es variable aleatoria, entonces $\{Y_i\}_{i\in I}$ es una colección de variables aleatorias independientes.*

Lema 3 [Suma de Variables Aleatorias Independientes] *Si X_1 e X_2 son variables aleatorias independientes, entonces*

- $p_{X_1+X_2}(c) = \sum_{a\in S_{X_1}} p_{X_1}(a)p_{X_2}(c-a) = \sum_{b\in S_{X_2}} p_{X_1}(c-b)p_{X_2}(b)$ *en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente discretas,*
- $f_{X_1+X_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x)f_{X_2}(t-x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t-x)f_{X_2}(x)dx$ *en el caso que X_1 y X_2 sean conjuntamente continuas.*

Lema 4 *Si* $X_1,\ldots,X_n$ *son variables aleatorias independientes tales que* $X_i \sim \mathrm{Normal}(\mu_i,\sigma_i^2)$*, entonces* $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Normal}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$*, y si además* $X_1,\ldots,X_n$ *son idénticamente distribuidas de acuerdo a una* $\mathrm{Normal}(\mu,\sigma^2)$*, entonces* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Normal}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Lema 5 [Método del Jacobiano] *Sean* $X_1,\ldots,X_n$ *variables aleatorias conjuntamente continuas. Sean* $D,R \subseteq \mathbb{R}^n$ *tales que* $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ *y* $\vec{g} = (g_1,\ldots,g_n) : D \to R$ *tal que para todo* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *se tiene que* $Y_i = g_i(X_1,\ldots,X_n)$ *es variable aleatoria (en particular esto último ocurre cuando* g_i *es continua). Si además*

1. $\vec{g}$ *es biyección, i.e., para todo* $(y_1,\ldots,y_n) \in R$*, el sistema de ecuaciones* $y_i = g_i(x_1,\ldots,x_n)$*,* $i \in \{1,\ldots,n\}$*, tiene solución única* $x_i = h_i(y_1,\ldots,y_n)$.
2. *las funciones* $g_1,\ldots,g_n$ *son tales que todas sus derivadas parciales son continuas y que el Jacobiano de* $\vec{g}$ *es no nulo para todo* $(x_1,\ldots,x_n) \in D$*, i.e.,*

$$(x_1,\ldots,x_n) \in D \qquad \Longrightarrow \qquad J(x_1,\ldots,x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Det} \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0\,.$$

Entonces, se tiene que $Y_1,\ldots,Y_n$ *son variables aleatorias conjuntamente continuas y*

$$\begin{aligned} f_{Y_1,\ldots,Y_n}(\vec{y}) &= \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(\vec{g}^{-1}(\vec{y}))\left|J(\vec{g}^{-1}(\vec{y}))\right|^{-1} & \text{si } \vec{y} \in R, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_{X_1,\ldots,X_n}(\vec{h}(\vec{y}))\left|J(\vec{h}(\vec{y}))\right|^{-1} & \text{si } \vec{y} \in R, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Esperanza Matemática

En lo que sigue sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean X, $X_1,\ldots,X_n$, e Y variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$.

Definición 2 [Esperanza] *Se define la esperanza o media de* X*, denotada* $\mathbb{E}(X)$*, por*

$$\mathbb{E}(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt + \int_0^{\infty}(1 - F_X(t))dt\,,$$

siempre y cuando alguna de las integrales sea finita.

Proposición 1 *Si* $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$*, entonces* $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Proposición 2 *Si $\mathbb{E}(X)$ es finita,*

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a \in S_X} a p_X(a)\,, & \text{si } X \text{ es discreta}\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt\,, & \text{si } X \text{ es absolutamente continua}\,. \end{cases}$$

Proposición 3 [Esperanza de una Función de una Variable Aleatoria] *Si $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}(\{X \in D\}) = 1$ y $g(X)$ es variable aleatoria,*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{a \in S_X} g(a) p_X(a)\,, & \text{si } X \text{ es discreta}\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t) dt\,, & \text{si } X \text{ es absolutamente continua}\,. \end{cases}$$

Lema 6 *Si $A \in \mathcal{F}$, y $\mathbb{I}_A$ denota la variable aleatoria $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ y $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ si $\omega \in \Omega \setminus A$, entonces $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{P}(A)$.*

Definición 3 [Varianza y Desviación] *Se define la varianza de X, denotada $\mathbb{V}ar(X)$, por*

$$\mathbb{V}ar(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)\,.$$

La desviación de X, denotada $\sigma(X)$, se define por $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$.

Proposición 4 [Esperanza de una Función de un Vector Aleatorio] *Si $\vec{X}$ denota el vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$, $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{P}\left(\left\{\vec{X} \in D\right\}\right) = 1$ y $g(\vec{X})$ es variable aleatoria,*

$$\mathbb{E}\left(g(\vec{X})\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\vec{a} \in S_{\vec{X}}} g(\vec{a}) p_{\vec{X}}(\vec{a})\,, & \text{si } X_1, \ldots, X_n \text{ son conjuntamente discretas}\,, \\ \displaystyle\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x}) f_{\vec{X}}(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_n\,, & \text{si } X_1, \ldots, X_n \text{ son conjuntamente continuas}\,. \end{cases}$$

Corolario 2 [Linealidad de la Esperanza] *Si X e Y son variables aleatorias y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\,, \\ \mathbb{E}(aX + b) &= a\mathbb{E}(X) + b\,. \end{aligned}$$

Corolario 3 *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}^2(X)\,, \\ \mathbb{V}ar(aX + b) &= a^2 \mathbb{V}ar(X)\,. \end{aligned}$$

Definición 4 [Covarianza] *Se define la covarianza de X e Y, denotada $\mathbb{C}ov(X, Y)$, por*

$$\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)\,.$$

Proposición 5 *Si $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X) &= \mathbb{C}ov(X,X)\,,\\
\mathbb{C}ov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)\,,\\
\mathbb{C}ov(X,Y) &= \mathbb{C}ov(Y,X)\,,\\
\mathbb{C}ov\left(aX+b, a'Y+b'\right) &= aa'\,\mathbb{C}ov(X,Y)\,,\\
\mathbb{V}ar(X \pm Y) &= \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) \pm 2\,\mathbb{C}ov(X,Y)\,.
\end{aligned}$$

Proposición 6 *La covarianza es una forma bilineal, i.e., si X, X', Y, e Y' son variables aleatorias,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\left(X \pm X', Y\right) &= \mathbb{C}ov(X,Y) \pm \mathbb{C}ov\left(X', Y\right)\,,\\
\mathbb{C}ov\left(X, Y \pm Y'\right) &= \mathbb{C}ov(X,Y) \pm \mathbb{C}ov\left(X, Y'\right)\,.
\end{aligned}$$

Lema 7 *Sean $g: D_X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h: D_Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\mathbb{P}(\{X \in D_X\}) = \mathbb{P}(\{Y \in D_Y\}) = 1$ y $g(X)$ y $h(Y)$ son variables aleatorias. Si X e Y son independientes,*

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\,\mathbb{E}(h(Y))\,.$$

En particular, si X e Y son independientes, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Corolario 4 *Si X e Y son independientes, $\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$ y $\mathbb{C}ov(X,Y) = 0$.*

Definición 5 **[Correlación]** *Si $\sigma(X), \sigma(Y) > 0$, se define la correlación entre X e Y, denotada $\rho(X,Y)$, por*

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\,.$$

Proposición 7 *Se tiene que $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$, $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$, y además,*

- *si $\rho(X,Y) = \pm 1$, entonces $\mathbb{P}(\{Y = a+bX\}) = 1$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y $b = \pm\sigma(Y)/\sigma(X)$.*
- *si $\mathbb{P}(\{Y = a+bX\}) = 1$, entonces $|\rho(X,Y)| = 1$.*

Proposición 8 *Si $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ son variables aleatorias,*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)\,, \qquad \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{C}ov(X_i, X_j)\,.$$

y

$$\mathbb{C}ov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{C}ov(X_i, Y_j)\,.$$

Lema 8 *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias. Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{X_n \geq 0\}) = 1$, o $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$, entonces $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n)$.*

Lema 9 *Si $X_1,\ldots,X_n$ son independientes*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \qquad y \qquad \mathbb{V}ar\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(X_i).$$

Definición 6 [Momentos] *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{E}(X^n)$ se denomina el n-ésimo momento de X o el momento de orden n de X.*

Definición 7 [Función Generadora de Momentos] *Se define la función generadora de momentos $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.*

Lema 10 *Si la función generadora de momentos de X, $\phi_X(\cdot)$, es n veces diferenciable en un intervalo abierto en torno al 0, entonces*

$$\mathbb{E}(X^n) = \left.\frac{d^n \phi_X}{dt^n}\right|_{t=0}.$$

Proposición 9 *Si $a,b \in \mathbb{R}$, $\phi_{aX+b}(t) = e^{tb}\phi_X(at)$.*

Proposición 10 *Si X e Y son independientes, entonces $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Lema 11 *$X_1,\ldots,X_n$ son independientes sí y sólo si $\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t_i)$ para todo $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1 *Si la función generadora de momentos de X, $\phi_X(\cdot)$, es finita en un intervalo abierto en torno a $t=0$ entonces la función distribución de X, $F_X(\cdot)$, está completamente determinada por $\phi_X(\cdot)$.*

3. Desigualdades

En lo que sigue sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sean X y $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$.

Proposición 11 [Desigualdad de Markov] *Si X es una variable aleatoria no–negativa, i.e., $\mathbb{P}(\{X \geq 0\}) = 1$, entonces para todo $t > 0$,*

$$\mathbb{P}(\{X \geq t\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}.$$

Proposición 12 [Desigualdad de Chebyshev] *Si X es una variable aleatoria de esperanza y varianza finita, entonces para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}ar(X).$$

Más aun, para todo $p > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}\right) \quad \leq \quad \frac{1}{\varepsilon^p}\,\mathbb{E}\left(|X - \mathbb{E}(X)|^p\right).$$

Proposición 13 $\mathbb{V}ar(X) = 0$ *sí y sólo si* $\mathbb{P}\left(\{X = \mathbb{E}(X)\}\right) = 1$.

Proposición 14 [Desigualdad de Jensen] *Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, dos veces diferenciable, y $\mathbb{P}\left(\{X \in D\}\right) = 1$, entonces*

$$\mathbb{E}\left(f(X)\right) \quad \geq \quad f(\mathbb{E}(X)),$$

si las esperanzas existen y son finitas.

Teorema 2 [Desigualdad de Kolmogorov] *Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\mathbb{V}ar(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces, para todo $a > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{i=1,\ldots,n} |X_1 + \ldots + X_i| > a\right\}\right) \quad \leq \quad \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$