Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos	**12 de Mayo, 2006**

Resumen No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: A. Contreras, R. Cortez*

1. Probabilidades Condicionales (continuación)

Definición 1 [Independencia] *Se dice que $A, B \in \mathcal{F}$ son eventos independientes si $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. En general, se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos independientes si para todo $n > 0$ y $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) .$$

Lema 1 *Si $A, B \in \mathcal{F}$ son eventos independientes entonces B y A, A y B^c, A^c y B, y A^c y B^c también son eventos independientes. En general, si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos independientes, $A \in \mathcal{C}$, y B se obtiene a partir de los eventos en $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ mediante una secuencia finita de operaciones de conjuntos (como complementación, unión, intersección, resta de conjuntos, diferencia simétrica, unión numerable, intersección numerable) entonces A y B son independientes.*

Definición 2 [Experimentos Independientes] *Sea I un conjunto numerable de índices y $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una sucesión de experimentos con espacios de probabilidad $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)\}_{i\in I}$. Se dice que el experimento $\mathcal{E}$ dotado del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ corresponde a la realización simultánea e independiente de los experimentos $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ si $\Omega = \times_{i\in I}\Omega_i$ y se satisface que:*

- *si I es finito y $A_i \in \mathcal{F}_i$ para todo $i \in I$, entonces para todo $A = \times_{i\in I} A_i \subseteq \Omega$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}_i(A_i)$.*
- *si I es infinito, J es subconjunto finito de I, y $A_j \in \mathcal{F}_j$ para todo $j \in J$, entonces para todo $A = \times_{i\in I} B_i \subseteq \Omega$ tal que $B_i = \Omega_i$ si $i \notin J$, se tiene que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(A) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}_j(A_j)$.*

2. Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Definición 3 [Variable Aleatoria] *Una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}$ se denomina variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Definición 4 [Función Distribución] *Sea X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. La función $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F_X(t) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le t\})$ se llama función distribución de X.*

En lo que sigue sea X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Convención 1 *Los eventos* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$, $\{\omega \in \Omega : t \leq X(\omega) < t'\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > t\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = t\}$, *y* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ *donde* $A \subset \mathbb{R}$, *los denotaremos por* $\{X \leq t\}$, $\{t \leq X < t'\}$, $\{X > t\}$, $\{X = t\}$, *y* $\{X \in A\}$ *respectivamente.*

Proposición 1 *Si F es una función distribución entonces*

1. *F es no–decreciente, i.e., si $t \leq t'$ entonces $F(t) \leq F(t')$.*
2. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ *y* $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$.
3. *F es continua por la derecha, i.e., si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente convergente a t, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \;=\; F(t)\,.$$

Corolario 1 *Si F es una función distribución discontinua en t entonces sólo puede tener una discontinuidad de salto en t, i.e., si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente convergentes a t, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) \;<\; F(t)\,.$$

Proposición 2 *Si F es una función distribución entonces tiene a lo más una cantidad numerable de discontinuidades.*

2.1. Variables Aleatorias Discretas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 5 [Variable Aleatoria Discreta] *Se dice que X es una variable aleatoria discreta si toma a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si $S_X = \{a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{X = a\}) > 0\}$ es numerable y $\mathbb{P}(S_X) = 1$. Al conjunto S_X se le denomina soporte de X y a la función $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $p_X(a) = \mathbb{P}(\{X = a\})$ se le denomina función densidad de probabilidad de X.*

Proposición 3 *Sea X una variable aleatoria discreta, se tiene que*

1. *si $a \in S_X$, entonces $p_X(a) > 0$.*
2. *si $a \notin S_X$, entonces $p_X(a) = 0$.*
3. $\sum_{a\in S_X} p_X(a) = 1$.

4. *la función densidad de probabilidad de X determina la función distribución de X, en particular,*

$$F_X(t) \;=\; \sum_{a \in S_X : a \leq t} p_X(a)\,.$$

Modelos discretos: A continuación se da la fórmula de la función de densidad probabilidad p_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X discretas. También se especifica el soporte S_X de cada tipo de variable aleatoria.

Bernoulli: X es una Bernoulli de parámetro $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, si

$$p_X(i) \;=\; p^i (1-p)^{1-i}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,1\}\,.$$

Binomial: X es una binomial de parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim \text{Binomial}(n,p)$, si

$$p_X(i) \;=\; \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,\ldots,n\}\,.$$

Geométrica: X es una geométrica de parámetro $p \in (0,1]$, i.e. $X \sim \text{Geomtrica}(p)$, si

$$p_X(i) \;=\; (1-p)^{i-1} p\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \mathbb{N} \setminus \{0\}\,.$$

Pascal: X es una Pascal de parámetros $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $p \in (0,1]$, i.e. $X \sim \text{Pascal}(r,p)$, si

$$p_X(i) \;=\; \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{r, r+1, r+2, \ldots\}\,.$$

Hipergeométrica: X es una hipergeométrica de parámetros $N, B, n \in \mathbb{N}$, $n \leq \min\{N,B\}$, i.e., $X \sim \text{Hiper}(n,N,B)$, si

$$p_X(i) \;=\; \frac{\binom{N}{i}\binom{B}{n-i}}{\binom{N+B}{n}}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \{0,\ldots,n\}\,.$$

Poisson: X es una Poisson de parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, i.e. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, si

$$p_X(i) \;=\; \frac{1}{i!}\,\lambda^i\, e^{-\lambda}\,, \qquad \text{si } i \in S_X = \mathbb{N}\,.$$

2.2. Variables Aleatorias Absolutamente Continuas

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$

Definición 6 [Variable Aleatoria Absolutamente Continua] *Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si existe una función $f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que para todo $C\subseteq\mathbb{R}$ para el cual $\{X\in C\}\in\mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(\{X\in C\}) \;=\; \int_C f_X(x)dx\,.$$

A la función f_X se le denomina función densidad de la variable aleatoria X.

Proposición 4 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, se tiene que*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx \;=\; 1$ *y* $\mathbb{P}(\{X=t\})=0$ *para todo* $t\in\mathbb{R}$.

2. $\displaystyle F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$ *y si f_X es continua en t, entonces* $\displaystyle f_X(t) \;=\; \frac{d}{dt}F_X(t)$.

Proposición 5 *Si X es variable aleatoria y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es tal que $\{x\in\mathbb{R} : h(x)\neq f_X(x)\}$ es numerable, entonces h también es función densidad de X, i.e., para todo $t\in\mathbb{R}$,*

$$F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \;=\; \int_{-\infty}^{t} h(x)dx\,.$$

En particular, la función densidad de una variable aleatoria no es única.

Proposición 6 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua. Sean $D,R\subseteq\mathbb{R}$ tales que $\mathbb{R}\setminus f_X^{-1}(\{0\})\subseteq D$ y $g:D\to R$ tal que $Y=g(X)$ es variable aleatoria (en particular esto ocurre cuando g es continua). Sigue que*

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}\left(\left\{X\in g^{-1}((-\infty,t])\right\}\right)\,.$$

Modelos absolutamente continuos: A continuación se da la fórmula de la función densidad f_X y los parámetros de varias distribuciones importantes de variables aleatorias X absolutamente continuas.

UNIFORME: X es una uniforme de parámetros $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, denotado $X\sim\text{Uniforme}(a,b)$, si

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b],\\ 0 & \text{en caso contrario}\,.\end{cases}$$

EXPONENCIAL: X es una exponencial de parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, denotado $X\sim\text{Exponencial}(\lambda)$, si

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0,\\ 0 & \text{en caso contrario}\,.\end{cases}$$

NORMAL: X es una normal de parámetros $\mu,\sigma^2\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$, denotado $X\sim\text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, si

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,, \qquad \text{si } x\in\mathbb{R}\,.$$

GAMA: X es una gama de parámetros $\lambda, p \in \mathbb{R}$, $\lambda, p > 0$, denotado $X \sim \text{Gama}(p, \lambda)$, si

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(p)} \lambda (\lambda x)^{p-1} e^{-\lambda x} \,, & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

CHI-CUADRADO: X es una chi-cuadrado con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ grados de libertad, i.e., $X \sim \chi^2_n$, si

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\, \Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1}\, e^{-x/2} \,, & \text{si } x > 0\,, \\ 0 & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

CAUCHY: X es una Cauchy de parámetro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, denotado $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$, si

$$f_X(x) \quad = \quad \frac{1}{\pi\sigma\, \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\,(x-\mu)^2\right)} \,, \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}\,.$$

BETA: X es una beta de parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, denotado $X \sim \text{Beta}(a, b)$, si

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

donde $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

Proposición 7 *Si* $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ *y* Φ *denota la función distribución de una* $\text{Normal}(0, 1)$, *entonces*

1. $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ *cualquiera sea* $t \in \mathbb{R}$,
2. *si* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *entonces* $aX + b \sim \text{Normal}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$, *en particular* $(X - \mu)/\sigma \sim \text{Normal}(0, 1)$.

3. Distribución Conjunta de Variables Aleatorias

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 7 [Función Distribución Conjunta] *A* $F_{X_1,\ldots,X_n}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se le llama función distribución conjunta de* $X_1,\ldots,X_n$ *si para todo* $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\{X_1 \le t_1,\ldots,X_n \le t_n\}\right) .$$

Proposición 8 *Para todo* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *y* $t_i \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_i}(t_i) \quad = \quad \lim_{t_1\to\infty} \cdots \lim_{t_{i-1}\to\infty} \lim_{t_{i+1}\to\infty} \cdots \lim_{t_n\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) .$$

Definición 8 [Funciones Distribución Marginales] *A las funciones distribución* $F_{X_1},\ldots,F_{X_n}$ *también se les denomina funciones distribución marginales de* $F_{X_1,\ldots,X_n}$.

Proposición 9 *Si* F *es la función distribución conjunta de* $X_1,\ldots,X_n$, *entonces*

1. F *es no–decreciente en cada una de sus coordenadas,*
2. $\lim_{t_1\to\infty} \cdots \lim_{t_n\to\infty} F(t_1,\ldots,t_n) = 1$, *y para todo* $t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{t_i\to-\infty} F(t_1,\ldots,t_n) &= 0 \\ \lim_{t_i\to\infty} F(t_1,\ldots,t_n) &= F_{X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n) . \end{aligned}$$

Definición 9 [Variables Aleatorias Conjuntamente Discretas] *Se dice que* $X_1,\ldots,X_n$ *son variables aleatorias conjuntamente discretas si toman a lo más una cantidad numerable de valores distintos, i.e., si* $S_{X_1,\ldots,X_n} = \{\vec{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}\left(\{X_1 = a_1,\ldots,X_n = a_n\}\right) > 0\}$ *es numerable y* $\mathbb{P}\left(S_{X_1,\ldots,X_n}\right) = 1$. *Al conjunto* $S_{X_1,\ldots,X_n}$ *se le denomina soporte del vector aleatorio* $(X_1,\ldots,X_n)$ *y a la función* $p_{X_1,\ldots,X_n}:\mathbb{R} \to [0,1]$ *tal que* $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n) = \mathbb{P}\left(\{X_1 = a_1,\ldots,X_n = a_n\}\right)$ *se le denomina función densidad de probabilidad conjunta de* $X_1,\ldots,X_n$.

Proposición 10 *Sean* $X_1,\ldots,X_n$ *variables aleatorias conjuntamente discretas, se tiene que*

1. $\sum_{\vec{a}\in S_{X_1,\ldots,X_n}} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n) = 1$ *y si* $\vec{a} \notin S_{X_1,\ldots,X_n}$ *entonces* $p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n) = 0$.
2. $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{\vec{a}\in S_{X_1,\ldots,X_n}:a_1\le t_1,\ldots,a_n\le t_n} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n)$.
3. $p_{X_i}(t_i) = \sum_{\vec{a}\in S_{X_1,\ldots,X_n}:a_i=t_i} p_{X_1,\ldots,X_n}(a_1,\ldots,a_n)$.

Definición 10 [Funciones Densidad de Probabilidad Marginales] *A las funciones densidad de probabilidad* $p_{X_1},\ldots,p_{X_n}$ *también se les denomina funciones densidad de probabilidad marginales de* $p_{X_1,\ldots,X_n}$.

Definición 11 [Variables Aleatorias Conjuntamente Continuas] *Se dice que* $X_1, \ldots, X_n$ *son variables aleatorias conjuntamente continuas si existe una función* $f_{X_1,\ldots,X_n}\colon\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *para el cual* $\{(X_1, \ldots, X_n) \in C\} \in \mathcal{F}$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}\left(\{(X_1, \ldots, X_n) \in C\}\right) \quad = \quad \int \cdots \int_C f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \, .$$

A la función $f_{X_1,\ldots,X_n}$ *se le denomina función densidad conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$.

Proposición 11 *Sean* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatorias conjuntamente continuas, se tiene que*

1. $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1.$

2. $\displaystyle F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ *y si* $f_{X_1,\ldots,X_n}$ *es continua en* $(t_1, \ldots, t_n)$, *entonces* $\displaystyle f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) \; = \; \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n).$

3. $\displaystyle f_{X_i}(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$

Definición 12 [Funciones Densidad Marginales] *A las funciones densidad de probabilidad* $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ *también se les denomina funciones densidad marginales de* $f_{X_1,\ldots,X_n}$.