Ma34a Probabilidades y Procesos Estocásticos **12 de Abril de 2006**

Resumen No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliares: A. Contreras, R. Cortez*

1. Análisis Combinatorial

Lema 1 [Principio Generalizado del Conteo] *Dados r experimentos $\mathcal{E}_1,\ldots,\mathcal{E}_r$ tales que para cada n_{i-1} posibles resultados de $\mathcal{E}_{i-1}$ hay n_i posibles resultados de $\mathcal{E}_i$, se tiene que hay $n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_r$ posibles distintos resultados que se pueden obtener de la realización conjunta de los r experimentos.*

Proposición 1 *Hay $n!$ distintas permutaciones (ordenamientos) de n objetos distinguibles.*

Proposición 2 *Sea $n\geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ distintos ordenamientos de largo k.*

Proposición 3 *Sea $n\geq k$. Con n objetos distinguibles se pueden formar $\dbinom{n}{k}$ subpoblaciones distintas de cardinalidad k.*

Definición 1 *Sean $n,n_1,n_2,\ldots,n_r\in\mathbb{N}$ tales que $n=n_1+n_2+\ldots+n_r$. Se define el coeficiente multinomial $\dbinom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}=\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$.*

Lema 2 *Sea $n=n_1+n_2+\ldots+n_r$. Hay $\dbinom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ formas de distribuir n bolas distinguibles en r urnas distinguibles de forma que en la i-ésima urna queden n_i bolas.*

Lema 3 *Sea $r>0$. Hay $\dbinom{n+r-1}{r-1}=\dbinom{n+r-1}{n}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles.*

Lema 4 *Sea $n\geq r>0$. Hay $\dbinom{n-1}{r-1}$ formas de distribuir n bolas indistinguibles en r urnas distinguibles de forma que ninguna urna quede vacía.*

2. Teoría Axiomática de Probabilidades

Definición 2 [Medida de Probabilidad] *Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ una familia de eventos de interés (técnicamente una σ-álgebra). Decimos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\Omega,\mathcal{F})$ si $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$ es tal que*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. **[σ-aditividad]** *si* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección de eventos disjuntos, i.e. tales que* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *se tiene que* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

A la tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *se le denomina espacio de probabilidad.*

Observación 1 *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *es un espacio de probabilidad, entonces* $\mathbb{P}(\cdot)$ *sólo está definida sobre* $\mathcal{F}$. *En rigor, deberíamos tener cuidado de evaluar* $\mathbb{P}(\cdot)$ *sólo en aquellos conjuntos* E *pertenecientes a* $\mathcal{F}$. *En este curso no nos preocuparemos de esto, asumiremos que todo funciona bien, o en otras palabras que cada vez que estemos evaluando* $\mathbb{P}(\cdot)$ *en algún conjunto* E *dicho conjunto pertenece a* $\mathcal{F}$.

Proposición 4 *Se tiene que;*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. *para todo evento* E *se tiene que* $\mathbb{P}(E^c) = 1 - \mathbb{P}(E)$,
3. *si* E *y* F *son eventos tales que* $E \subseteq F$, *entonces* $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.
4. **[Aditividad finita]** *si* I *es un conjunto finito de índices y* $\{E_i\}_{i\in I}$ *una colección de eventos disjuntos, i.e.* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *para todo* $i \neq j$, *entonces* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)$.

Lema 5 [Principio de Inclusión–exclusión] *Si* $\{E_s\}_{s\in S}$ *es una colección finita de eventos entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{s\in S} E_s\right) = \sum_{I\subseteq S : I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \sum_{r=1}^{|S|} \sum_{I\subseteq S:|I|=r} (-1)^{r+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right).$$

Lema 6 [Desigualdad de Boole] *Si* $\{E_i\}_{i\in I}$ *es una colección numerable de eventos, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(E_i).$$

3. Probabilidades Condicionales

En lo que sigue sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Convención 1 *Si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *son conjuntos denotamos su intersección* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ *por* $A_1 A_2 \cdots A_n$.

Definición 3 [Probabilidad Condicional] *Sean* $E, F \in \mathcal{F}$ *dos eventos tales que* $\mathbb{P}(F) > 0$ *se define la probabilidad de* E *dado* F, *denotado* $\mathbb{P}(E|F)$, *por* $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(EF)/\mathbb{P}(F)$.

Proposición 5 *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *y* $\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}) \mathbb{P}(A_{n-1} | A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(A_2 | A_1) \mathbb{P}(A_1).$$

Proposición 6 *Sea* $F \in \mathcal{F}$ *tal que* $\mathbb{P}(F) > 0$ *sigue que* $\mathbb{P}(\cdot|F) : \mathcal{F} \to [0,1]$ *tal que a* E *le asocia* $\mathbb{P}(E|F)$ *es una medida de probabilidad sobre el espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 4 [Partición] *Sea I un conjunto de índices, se dice que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de Ω si $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$, y para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$ se tiene que $A_i \cap A_j = \emptyset$.*

Lema 7 [Regla de Probabilidades Totales] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de Ω tal que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para todo $i \in I$. Sigue que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(AA_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)\,.$$

Teorema 1 [Teorema de Bayes] *Sea I un conjunto de índices numerables y sea $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ una partición de Ω. Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ se tiene que para cualquier $j \in I$,*

$$\mathbb{P}(A_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}\,.$$