Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos **15 de Julio, 2006**

Pauta Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

Problema 1:

(i).- Claramente Y se distribuye uniformemente en $\{2,3,5\}$, luego $\mathbb{E}(Y) = (2+3+5)/3 = 10/3$.

Por otro lado, la probabilidad de tomar el primer túnel es 1/3. Como N corresponde al número de túneles hasta que se elige el que lleva a la salida, sigue que $N \sim$ Geometrica(1/3).

(ii).- Condicionado en el hecho que el primer túnel que recorrió el minero no conducía a la salida, sea X' la distancia recorrida por el minero hasta encontrar la salida pero exceptuando el primre túnel que recorrió. Como una vez que el minero regresa al punto de partida la situación es equivalente a la original, se tiene que X y X' se distribuyen de la misma forma. Por otro lado, X' depende de los túneles que haya recorrido el minero salvo por el primero, e Y depende del primer túnel recorrido. Como las elecciones de qué túneles seguir son independientes, se tiene que X' e Y son independientes.

Como funciones de variables aleatorias independientes son independientes, tenemos que X' y $\mathbb{I}_{\{3,5\}}(Y)$ son independientes. Luego, por linealidad de la esperanza y por independencia, sigue que

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}\left(X' \cdot \mathbb{I}_{\{3,5\}}(Y)\right) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{3,5\}}(Y)\right) .$$

Pero, $\mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{3,5\}}(Y)\right) = \mathbb{P}(Y \in \{3,5\}) = 2/3$. De (i) y un simple cálculo aritmético se obtiene que $\mathbb{E}(X) = 10$.

(iii).- Primero observemos que los Y_k's son independientes e idénticamente distribuidas. Por la indicación y la LGN versión fuerte,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{N_1 + \ldots + N_n} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i = \mathbb{E}(Y_1) ,$$

donde la última igualdad es con probabilidad 1. Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{N_1 + \ldots + N_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i} .$$

Sea A el evento $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i = \mathbb{E}(N_1)$ y B el evento $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_1)$. Por LGN versión fuerte, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$. Luego, con probabilidad 1 se cumple simultáneamente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i = \mathbb{E}(N_1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_1) .$$

Por continuidad de $x \to x^{-1}$ para $x > 0$ y dado que $\mathbb{E}(N_1) \geq 1 > 0$, con probabilidad 1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{N_1 + \ldots + N_n} = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\mathbb{E}(N_1)} .$$

Como ambos límites indicados en el enunciado se cumplen con probabilidad 1, también se cumplen simultáneamente con probabilidad 1, i.e. con probabilidad no nula,

$$\frac{\mathbb{E}\left(X_1\right)}{\mathbb{E}\left(N_1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1+\ldots+X_n}{N_1+\ldots+N_n} = \mathbb{E}\left(Y_1\right) .$$

Pero la identidad $\mathbb{E}\left(X_1\right)/\mathbb{E}\left(N_1\right) = \mathbb{E}\left(Y_1\right)$ es o no es cierta (i.e.ño es una afirmación probabilista). Por lo tanto, y como se estableció que tiene probabilidad no nula, la identidad debe ser cierta.

Problema 2:

(i.1).- Como no se da ningun tipo de información, podemos supener que los valores de $A_1,\ldots,A_n$ están prefijados antes de comenzar el proceso de adivinanzas. Sea N_i la variable aleaotria indicatriz del evento "la i-ésima adivinanza es un ascierto". Notar que $N_i \sim \text{Bernoulli}(1/n)$. Como $N = N_1+\ldots+N_n$, por linealidad de la esperanza sigue que

$$\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(N_i\right) = n\frac{1}{n} = 1 .$$

(i.2).- La estratégia natural es elegir un A_i distinto al valor de los naipes que hayan aparecido. Definiendo N_i como en la parte (i.1) y observando que ahora $N_i \sim \text{Bernoulli}(1/(n-i+1))$, sigue que

$$\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(N_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} .$$

(ii.1).- Nos referiremos por O al naipe que estaba originalmente al fondo del mazo. La afirmación del enunciado la probaremos por inducción. La afirmación es trivialmente cierta cuando $k=0$. Supongamos entonces que se cumple para $k-1$ y que hay k naipes debajo de O. Sea $s\in S$ la última carta que se insertó en alguna posición debajo de O. Por hipótesis de inducción, sabemos que $S\setminus\{s\}$ está con igual probabilidad en uno cualquiera de sus $(k-1)!$ posibles ordenamientos. Notar que hay k posiciones distintas en cualquier ordenamiento de $S\setminus\{s\}$ donde s podría insertarse (debajo de $i\in\{0,\ldots,k-1\}$ naipes). En cada una de estas posiciones es igualmente probable que se haya insertado el naipe s. Luego, S queda en uno de sus $k!$ posibles ordenamientos con igual probabilidad.

Justo un paso antes de parar el procedimiento descrito, se tiene que $k=n-1$. Luego, el mazo está perfectamente barajado, salvo por el naipe O. Al realizar el último paso, por un argumento similar al del párrafo anterior, se obtiene un mazo perfectamente barajado, i.e. en uno cualquiera de sus posibles $n!$ ordenamientos.

(ii.2).- Al igual que en (ii.1), denotaremos por O al naipe que esaba originalmente al fondo del mazo. El problema planteado es esencialmente el del Recolector de Cupones. La idea es interpretar el colocar un naipe bajo O como obtener un nuevo cupón. Formalmente, sea N_k el número de pasos desde que hay $k-1$ hasta que hay k cartas debajo de O. Claramente, $N = N_1+\ldots+N_{n-1}+1$. Además, si hay $k-1$ cartas debajo de O, entonces durante la próxima etapa con probabilidad k/n el naipe superior del mazo quedará debajo de O. Luego, N_k sigue una Geometrica(k/n) y por lo tanto su esperanza es n/k. Por linealidad de la esperanza, sigue que

$$\mathbb{E}\left(N\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}\left(N_k\right) + 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) .$$

Problema 3:

(i).- Basta observar que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\left(\overline{X}-\mu\right)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)+n\left(\overline{X}-\mu\right)^2 ,\end{aligned}$$

y notar que $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)=0$.

(ii).- Sea A el evento $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2=0$ y B el evento $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\sigma^2$. Por LGN versión fuerte, sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}_n=\mu$. Luego, por continuidad, $\mathbb{P}(A)=1$. Además, $\mathbb{E}\left((X_i-\mu)^2\right)=\mathbb{V}ar\,(X_i)=\sigma^2$. Luego, nuevamente por LGN versión fuerte, $\mathbb{P}(B)=1$. Sigue que $\mathbb{P}(A\cup B)=1$, lo que junto con (i) implica que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2=\sigma^2\right)=1\,.$$

La conclusión deseada sigue del hecho que $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2=\sigma^2$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^2=\sigma^2$.

(iii).- Dividiendo la igualdad obtenida en (i) por σ^2 sigue que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 .$$

Como las $(X_i-\mu)/\sigma$, $i=1,\ldots,n$, son Normal$(0,1)$ e independientes, sigue que

$$W=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 ,$$

es una suma de n cuadrados de distribuciones Normal$(0,1)$ independinetes, i.e. sigue una χ_n^2. Además, por propiedades de la normal, es fácil ver que $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)/\sigma\sqrt{n}$ es una Normal$(0,1)$. Luego,

$$Z=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 ,$$

es el cuadrado de una Normal$(0,1)$, i.e. sigue una χ_1^2.

(iv).- Sea $Y=(n-1)S_n^2/\sigma^2$. Del enunciado sabemos que $\overline{X}_n$ y S_n^2 son independientes, y como funciones de variables aleatorias independientes son independientes, sigue que Y y Z son independientes. Luego, por (iii) y propiedades de la función generadora de momento, si $t<1/2$, entonces

$$(1-2t)^{-n/2}=\phi_W(t)=\phi_Y(t)\cdot\phi_{Z^2}(t)=\phi_Y(t)(1-2t)^{-1/2}\,.$$

Despejando, se obtiene que $\phi_Y(t) = (1-2t)^{-(n-1)/2}$, i.e. Y tiene la misma función generadora de momentos que una χ^2_{n-1}. Como la función generadora de momentos caracteriza completamente la distribución de la variable aleatoria, concluimos que $Y \sim \chi^2_{n-1}$.

(v).- En el caso planteado, $\alpha = 0{,}95$ y $(1-\alpha)/2 = 0{,}025$. Además, $n-1 = 10$. De la tabla del enunciado sigue que $\mathbb{P}\left(\chi^2_9 < 2{,}700\right) = 0{,}025$. Luego,

$$0{,}025 = \mathbb{P}\left(2{,}700 > \chi^2_9\right) = \mathbb{P}\left(2{,}700 > \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 > \frac{(n-1)S_n^2}{2{,}700}\right) .$$

Definimos entonces

$$b = \frac{1}{2{,}700}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2 .$$

Analogamente, y dado que $\mathbb{P}\left(\chi^2_9 > 19{,}020\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\chi^2_9 \leq 19{,}020\right) = 0{,}025$, definimos

$$a = \frac{1}{19{,}020}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_n\right)^2 .$$