Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos **3 de Julio, 2006**

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

Problema 1:

(i).- Determinaremos primero la función densidad marginal de X. Para ello, basta observar que $Area(A) = 3$ por lo que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) \cdot \int_{-1+|x|}^{1} \frac{1}{3}dy = \frac{2-|x|}{3} \cdot \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\,.$$

Como era de esperar, $f_X(\cdot)$ es una función par (simétrica en torno al origen). Sigue inmediatamente que $\mathbb{E}(X) = 0$. Luego,

$$\mathbb{V}ar\,(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{2-|x|}{3}dx = 2\int_{0}^{1} x^2 \cdot \frac{2-|x|}{3}dx = 2\left(\frac{2x^3}{9} - \frac{x^4}{12}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{18}\,.$$

(ii).- Por propiedad de la covarianza, tenemos que $\mathbb{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}\,(XY) - \mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y)$. Pero por (i) sabemos que $\mathbb{E}\,(X) = 0$. Luego,

$$\mathbb{C}ov\,(X,Y) = \mathbb{E}\,(XY) = \int\int \frac{xy}{Area(A)}\mathbb{I}_A(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} x\left\{\int_{-1+|x|}^{1} \frac{y}{3}dy\right\}dx\,.$$

Como $x \to x\int_{-1+|x|}^{1} \frac{y}{3}dy$ es una función impar, se tiene que $\mathbb{C}ov\,(X,Y) = 0$.

(iii).- Se percibe facilmente que X e Y son dependientes a pesar que tienen covarianza nula. En efecto, se observa que mientras más cercano este Y de -1, más probable es que X tome valores cercanos a 0. De hecho, si B denota el conjunto de la Figura 1, entonces

$$\mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{1}{2}, |X| \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left((X,Y) \in B\right) = \frac{Area(B)}{Area(A)} = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}\,.$$

Por otro lado, si C denota el conjunto de la Figura 2, entonces

$$\mathbb{P}\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left((X,Y) \in C\right) = \frac{Area(C)}{Area(A)} = \frac{7/4}{3} = \frac{7}{12}\,.$$

Como $1/12 \neq (7/12) \cdot (1/12)$ se concluye que X e Y no son independientes.

Nota: Ciertamente podríamos haber establecido la dependencia de X e Y mostrando que

$$f_{X,Y} \neq f_X \cdot f_Y\,.$$

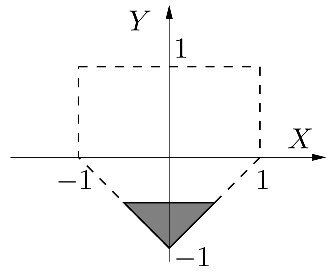

Figura 1: Conjunto B.

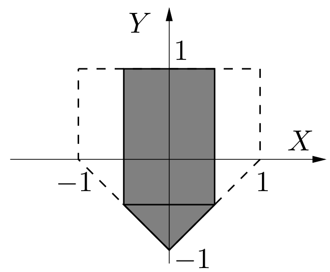

Figura 2: Conjunto C.

No es difícil deducir que

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1+y)/3 & \text{si } -1 \leq y \leq 0, \\ 2/3 & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 0\,, & \text{si } |y| > 1. \end{cases}$$

Lo anterior y el valor de f_X obtenido en la parte (i) permiten concluir que $f_{X,Y} \neq f_X f_Y$, i.e. X e Y son independientes.

Problema 2:

(i).- Claramente $\mathbb{E}\left(I_1\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = 1\right) = p$. Por otro lado, si $i > 1$, entonces

$$\mathbb{E}\left(I_i\right) = \mathbb{P}\left(I_i = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_{i-1} = 0, X_i = 1\right) = p(1-p)\,.$$

Sigue que $\mathbb{E}\left(C\right) = p + (n-1)p(1-p)$.

(ii).- Como I_i es una variable aleatoria de tipo Bernoulli, por (i) tenemos que

$$\mathbb{V}ar\left(I_i\right) = \mathbb{E}\left(I_i\right)\left(1 - \mathbb{E}\left(I_i\right)\right) = \begin{cases} p(1-p), & \text{si } i = 1, \\ p(1-p)[1 - p(1-p)], & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Para calcular la covarianza pedida observemos que dado que los I_i's son de tipo Bernoulli,

$$\mathbb{C}ov\left(I_i, I_j\right) = \mathbb{E}\left(I_i I_j\right) - \mathbb{E}\left(I_i\right)\mathbb{E}\left(I_j\right)\,.$$

Pero

$$\mathbb{E}(I_i I_j) = \mathbb{P}(I_i = 1, I_j = 1) = \mathbb{P}(X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{j-1} = 0, X_j = 1)\ .$$

Si $|i-j| > 1$, entonces $\{X_{i-1} = 0, X_i = 1\}$ y $\{X_{j-1} = 0, X_j = 1\}$ son independientes, por lo que en este caso,

$$\mathbb{E}(I_i I_j) = \mathbb{P}(X_{i-1} = 0, X_i = 1)\,\mathbb{P}(X_{j-1} = 0, X_j = 1) = \mathbb{E}(I_i)\,\mathbb{E}(I_j)\ .$$

Por otro lado, si $|i-j| = 1$, y asumiendo sin pérdida de generalidad que $i < j$, tenemos que el evento $\{X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{j-1} = 0, X_j = 1\}$ es infactible, luego tiene probabilidad nula. Resumiendo, se concluye que si $i < j$, entonces

$$\mathbb{C}ov(I_i, I_j) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i < j-1, \\ -p^2(1-p)\,, & \text{si } i = 1 \text{ y } j > 2, \\ -p^2(1-p)^2\,, & \text{si } 1 < i = j-1. \end{cases}$$

Luego, por propiedades de la varianza y bilinealidad de la función de covarianza,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar(C) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(I_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{C}ov(I_i, I_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar(I_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}ov(I_i, I_{i+1}) \\ &= [p(1-p) + (n-1)p(1-p)(1-p(1-p))] - 2\left[p^2(1-p) + (n-2)p^2(1-p)^2\right]\ . \end{aligned}$$

Evaluando en $p = 1/2$ se obtiene que

$$\mathbb{V}ar(C) = \frac{1}{4} + (n-1)\frac{3}{16} - 2\frac{1}{8} - 2(n-2)\frac{1}{16} = \frac{n+1}{16}\ .$$

(iii).- Por inspección de la secuencia del enunciado, $c = 32$. De la parte (i) y (ii) sabemos que $\mathbb{E}(C) = (n+1)/4$ y $\mathbb{V}ar(C) = (n+1)/16$. Por Chebyshev,

$$\mathbb{P}(C \ge c) = \mathbb{P}(C - \mathbb{E}(C) \ge c - \mathbb{E}(C)) \le \mathbb{P}(|C - \mathbb{E}(C)| \ge c - \mathbb{E}(C)) \le \frac{\mathbb{V}ar(C)}{(c - \mathbb{E}(C))^2}\ .$$

En nuestro caso,

$$\frac{\mathbb{V}ar(C)}{(c - \mathbb{E}(C))^2} = \frac{101/16}{(32 - 101/4)^2} \approx \frac{25/4}{7^2} \approx \frac{1}{8}\,.$$

Luego, si bien el análisis no es concluyente, uno tendería a pensar que la persona que generó la secuencia no es un buen reemplazo para un generador de bits verdaderamente aleatorio.

Nota: Uno también podría haber tratado de aplicar Markov, en cuyo caso uno obtendría una cota superior para $\mathbb{P}(C \ge c)$ del orden de $25/32 \approx 0{,}78$, y no se podría inferir que la secuencia del enunciado representa una cantidad excesiva de corridas de 1's.

PROBLEMA 3:

(i).- Para $k = 1$ la afirmación es trivialmente cierta puesto que una geométrica de parámetro p es lo mismo que una Pascal de parámetros $(1, p)$. Supongamos entonces que $X_1 + \ldots + X_{k-1} \sim$ Pascal$(k-1, p)$ y verifiquemos que tambén se cumple para k. En efecto, de la fórmula para la densidad de una suma de variables aleatorias independientes, y dado que $S_{k-1} = X_1 + \ldots + X_{k-1}$ es independiente de X_k, sigue que

$$\begin{aligned} p_{S_k}(a) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} q^{a-n-1} p\, \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}(a-n) \cdot \binom{n-1}{(k-1)-1} q^{n-(k-1)} p^{k-1} \\ &= q^{a-k} p^k \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}(a-n) \cdot \binom{n-1}{k-2} \\ &= q^{a-k} p^k \sum_{n=k-1}^{a-1} \binom{n-1}{k-2} \\ &= q^{a-k} p^k \sum_{n=k-2}^{a-2} \binom{n}{k-2} . \end{aligned}$$

De la propiedad del Triángulo de Pascal, se obtiene que $\sum_{n=k-2}^{a-2} \binom{n}{k-2} = \binom{a-1}{k-1}$. Luego,

$$p_{S_k}(a) = \binom{a-1}{k-1} q^{a-n} p^k ,$$

i.e. $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ se distribuye como una Pascal(k, p).

Informalmente el resultado se explica por el hecho que una Pascal(k, p) representa el número S_k de repeticiones independientes que hay que realizar hasta observar la k-ésima ocurrencia de un evento fijo de probabilidad p. Sea entonces X_i el número de repeticiones que se realizan una vez obtenida la $i-1$ ocurrencia y hasta que aparece la i-ésima ocurrencia. Claramente $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. Por otro lado, los X_i son independientes y se distribuyen de acuerdo a una Geometrica(p).

Nota: Otra forma de abordar esta parte es determinar las función generatric ϕ_{X_i} de X_i, deducir la función generatriz de $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ vía

$$\phi_{S_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} \phi_{X_i}(t) ,$$

y comparar la función que se obtiene con la de la generatriz de una Pascal(k, p). En particular, por definición se tiene que

$$\phi_{X_i}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p e^{tn} = pe^t \sum_{n=1}^{\infty} (qe^t)^{n-1} = \frac{pe^t}{1-qe^t} .$$

Además, la generatriz de $X \sim$ Pascal(k, p) es

$$\phi_X(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} q^{n-k} p^k e^{tn} = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} (qe^t)^{n-k} (1-qe^t)^k = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k ,$$

donde hemos usado la identidad $1 = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} (qe^t)^{n-k} (1-qe^t)^k$ que surge de interpetar los términos dentro de la sumatoria como la función densidad de una Pascal$(k, 1-qe^t)$ (lo cual, estrictamente hablando requiere que $1 - qe^t \in]0, 1]$, que se cumple para t en un intervalo abierto en torno al 0 puesto que $q < 1$). Se tiene entonces que

$$\phi_{S_k}(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k = \phi_X(t) ,$$

en un intervalo abierto en torno al origen, luego por resultado visto en cátedra, S_k y X se distribuyen de la misma forma, i.e. S_k es una Pascal(k,p).

(ii).- Definimos $g=(g_1,g_2):(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^2\to(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^2$ tal que $g(x,y)=((x/n)/(y/m),y)$. Sigue que $g(\cdot)$ es invertible en $(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^2$ y tiene inversa $h=(h_1,h_2):(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^2\to(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^2$ tal que $h(a,b)=(abn/m,b)$. Además, el Jacobiano de $g(\cdot)$ es

$$J_g(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x}\\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{m}{ny} & 0\\ -\frac{mx}{ny^2} & 1\end{vmatrix}=\frac{m}{ny}\,.$$

Claramente $J_g(x,y)$ es no-nulo sobre $(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})^2$ por lo que el método del Jacobiano es aplicable. Sigue que

$$f_{F,Y}(a,b)=\left.f_{X,Y}\left(x,y\right)\cdot\frac{1}{|J_g(x,y)|}\right|_{x=h_1(a,b),y=h_2(a,b)}.$$

Por independencia de X e Y sabemos que $f_{X,Y}=f_Xf_Y$. Luego, si $a,b>0$,

$$\begin{aligned}f_{F,Y}(a,b) &= \frac{1}{2^{(n+m)/2}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{abn}{m}\right)^{n/2-1}e^{-abn/2m}\cdot b^{m/2-1}e^{-b/2}\cdot\frac{nb}{m}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}a^{n/2-1}\cdot\frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(\frac{n+m}{2})}b^{(n+m)/2-1}e^{-b(\frac{n}{m}a+1)/2}\end{aligned}$$

Por otro lado, $f_{F,Y}(a,b)=0$ si $a\le 0$ o $b\le 0$.

Integrando de manera de obtener la marginal de F y haciendo el cambio de variable $c=b(\frac{n}{m}a+1)$, se tiene que si $a>0$,

$$\begin{aligned}f_F(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty}f_{F,Y}(a,b)db\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}a^{n/2-1}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(\frac{n+m}{2})}b^{(n+m)/2-1}e^{-b(\frac{n}{m}a+1)/2}db\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}\frac{a^{n/2-1}}{(\frac{n}{m}a+1)^{(n+m)/2}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{(n+m)/2}\Gamma(\frac{n+m}{2})}c^{(n+m)/2-1}e^{-c/2}dc\\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})}\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}\frac{a^{n/2-1}}{(\frac{n}{m}a+1)^{(n+m)/2}}\,,\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del hecho que la integral corresponde a integrar la función densidad de una χ^2_{n+m} en su soporte, luego da 1.