Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos **22 de Mayo, 2006**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

PROBLEMA 1:

(i.1).- Para $i = 1, \ldots, n$, sea $\mathcal{E}_i$ un experimento con espacio de probabilidad asociada $(\{c, s\}, 2^{\{c,s\}}, \mathbb{P}_i)$ donde $\mathbb{P}_i$ es la medida de probabilidad que hace equiprobable a $\{c, s\}$. Asumiendo que el lanzamiento de la moneda de cada computador es independiente del lanzamiento de monedas de los otros computadores, entonces un modelo de la etapa t de la situación descrita es el experimento producto $\mathcal{P}_t = \mathcal{E}_1 \times \ldots \mathcal{E}_n$, lo que determina completamente el espacio muestral, conjunto de eventos de interés y medida de probabilidad. Asumiendo que las etapas son independientes unas de otras, un modelo para el procedimiento repetido en el tiempo queda dado por el experimento producto

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \ldots \times \mathcal{P}_t \times \ldots$$

(i.2).- Sea E_i el evento "el i-ésimo computador tiene éxito en enviar un paquete" y C_i el evento "el lanzamiento de la moneda del i-ésimo computador sale cara." Claramente,

$$E_i = C_i \cap \bigcap_{j \neq i} \overline{C_j} \, .$$

Como los C_j son independientes, sigue que

$$\mathbb{P}(E_i) = \mathbb{P}(C_i) \cdot \prod_{j \neq i} \mathbb{P}(C_j) = p(1-p)^{n-1} \, .$$

Si definimos $f(p) = p(1-p)^{n-1}$ y diferenciamos con respecto a p, se verifica que

$$f'(p) = (1-p)^{n-1} - (n-1)p(1-p)^{n-2} = (1-p)^{n-2}(1-np) \, .$$

Igualando a 0 se deduce que $f(p)$ tiene un único valor crítico en $p = 1/n$. Es fácil ver que dicho valor es efectivamente un máximo para $f(\cdot)$. Finalmente, notar que si p fuese muy pequeño en comparación con $1/n$, entonces muy pocos computadores intentarían enviar paquetes, y en muchas etapas nadie haría el intento. Si p fuese muy grande, habrían muchas colisiones y en muchas etapas nadie tendría éxito enviando paquetes. Si $p = 1/n$ en cada etapa en promedio sólo uno computador intenta enviar mensajes lográndose así la mejor tasa de éxitos.

(ii.1).- En efecto,

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \;=\; 1 - \mathbb{P}(Y > t) \;=\; 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \ldots, X_n > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) \;=\; 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(t)) \, , \end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad es por definición de función distribución, la segunda igualdad es por complementaridad de $\mathbb{P}$, y la cuarta igualdad es por independencia de $X_1, \ldots, X_n$.

(ii.2).- Si X_i es Uniforme$(0,1)$, entonces $f_{X_i}(t) = \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$ y $F_{X_i}(t)$ es igual a 0, t y 1 dependiendo si $t \leq 0$, $t \in]0,1[$, o $t \geq 1$ respectivamente. De la parte (ii.1) sigue que,

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(1-(1-t)^3\right)\mathbb{I}_{]0,1[}(t) = 3(1-t)^2 \cdot \mathbb{I}_{]0,1[}(t)\,.$$

Problema 2:

(i).- Si en t pasos el borrachito da exactamente k pasos en la dirección $+$, entonces da $t-k$ pasos en la dirección -1. Luego, queda en $k-(t-k) = 2k-t$. El número de pasos X_t' en la dirección $+$ que da el borrachito es una Binomial(t,p) y $X_t = 2X_t' - t$. Luego, si $(t+n)/2 \in \{0,\ldots,t\}$ es par (equivalentemente $n \in \{-t,-t+2,\ldots,t-2,t\}$),

$$\mathbb{P}\left(X_t = n\right) = \mathbb{P}\left(2X_t' - t = n\right) = \mathbb{P}\left(X_t' = \frac{t+n}{2}\right) = \binom{t}{\frac{t+n}{2}} p^{(t+n)/2}(1-p)^{(t-n)/2}\,.$$

Si $n \notin \{-t,-t+2,\ldots,t-2,t\}$, entonces $\mathbb{P}\left(X_t = n\right) = 0$.

(ii).- Observar que

$$F_{T_n}(t) \;=\; \mathbb{P}\left(T_n \leq t\right) \;=\; \mathbb{P}\left(N(t) \geq n\right) \;=\; 1 - \mathbb{P}\left(N(t) < n\right)\,,$$

donde la primera igualdad es por definición de función distribución, la segunda por definición de T_n, y la última por propiedad de $\mathbb{P}(\cdot)$. Pero $N(t)$ es una variable aleatoria de Poisson, por lo que su soporte es $\mathbb{N}$. Sigue que $N(t) < n$ sí y sólo si $N(t) \in \{0,\ldots,n\text{-}1\}$. Luego,

$$F_{T_n}(t) \;=\; 1 - \sum_{m=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(N(t) = m\right) \;=\; 1 - \sum_{m=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!} \;=\; 1 - e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\,.$$

Para verificar que T_n es una Gama(n,λ), debemos encontrar la función densidad $f_{T_n}(\cdot)$ de T_n y corroborar que corresponde a la función densidad de una Gama. Observemos entonces que

$$f_{T_n}(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}F_{T_n}(t) \;=\; \lambda e^{-\lambda t}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!} - e^{-\lambda t}\sum_{m=1}^{n-1}\lambda\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m\text{-}1)!} \;=\; \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n\text{-}1)!}\,.$$

Recordando que $\Gamma(n) = (n\text{-}1)!$ se concluye que $f_{T_n}(\cdot)$ corresponde a la función densidad de una Gama(n,λ).

Problema 3:

(i).- Para determinar el tipo de variables aleatorias de X e Y debemos calcular sus densidades $f_X(\cdot)$ y $f_Y(\cdot)$. Para ello, notar que

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(a,b)db = \lambda e^{-\lambda a}\cdot\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(a)\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda b}db = \lambda e^{-\lambda a}\cdot\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(a)\,,$$

donde la última igualdad es consecuencia del hecho que $\lambda e^{-\lambda b}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(b)$ es una función densidad, por lo tanto integra a 1. En resumen, $X \sim$ Exponencial(λ). Analogamente, se verificar que $Y \sim$ Exponencial(λ).

(ii).- Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R} \,:\, y \geq \alpha x\}$. Se tiene que

$$\mathbb{P}\left(Y \geq \alpha X\right) = \iint_C f_{X,Y}(x,y)dxdy = \lambda^2 \iint_{C\cap\mathbb{R}^2_+} e^{-\lambda(x+y)}dxdy = \lambda^2 \int_0^{+\infty}\int_{\alpha x}^{+\infty} e^{-\lambda(x+y)}dydx\,.$$

Luego,

$$\mathbb{P}\left(Y \geq \alpha X\right) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\left(-e^{-\lambda y}\right)\Big|_{\alpha x}^{+\infty} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(1+\alpha)x}dx = \frac{1}{1+\alpha}\,.$$

(iii).- Sea $Z = X/(X+Y)$ y $t > 0$. Entonces,

$$F_Z(t) = \mathbb{P}\left(X \leq t(X+Y)\right) = \mathbb{P}\left(Y \geq (1/t - 1)X\right)\,.$$

Luego, de la parte anterior si $1/t - 1 > 0$, entonces $F_Z(t) = t$. Resumiendo, si $t \in]0,1[$, entonces $F_Z(t) = t$. Como toda función distribución es no-decreciente y toma valores en $[0,1]$, se tiene que $F_Z(0) = 0$ y $F_Z(1) = 1$ implican que $F_Z(t) = 0$ si $t \leq 0$ y $F_Z(t) = 1$ si $t \geq 1$. Hemos concluido que $F_Z(t) = t \cdot \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$. Derivando, se tiene que $f_Z(t) = \mathbb{I}_{]0,1[}(t)$, i.e., $Z \sim$ Uniforme$(0,1)$.