Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos **17 de Abril, 2006**

Pauta Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

Problema 1:

(i).- De 9! formas distintas, correspondiente a las permutaciones de $\{1, \ldots, 9\}$.

(ii).- Si ya se han completado los recuadros A y B, entonces se han fijado 6 de los 9 números distintos de cada una de las filas. Sea C_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, el conjuntos de 3 números que no aparecen en en los recuadros A y B en la misma fila. Dichos números son los únicos que pueden ir en la fila i del recuadro C.

Observemos ahora que los conjuntos C_1, C_2 y C_3 son disjuntos. En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que $C_1 C_2 \neq \emptyset$. Sea $n \in C_1 C_2$. Sigue que n no está en las filas 1 ni 2 de los recuadros A y B. Luego, n necesariamente debe estar en la fila 3 de los recuadros A y B. Pero esto violaría una de las reglas de Sudoku.

De la discusión previa, sigue que para completar el recuadro C los números en C_i deben colocarse en la fila i del recuadro C. Hay 3! ordenamientos posibles de C_i. Lo anterior es válido para cada una de las 3 filas. Luego, por el principio generalizado del conteo hay $(3!)^3 = 6^3 = 216$ formas distintas de completar el recuadro C.

(iii).- Sea A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, el conjuntos de 3 números que aparecen en la fila i del recuadro A. Los números que se pueden colocar en la fila 1 del recuadro B deben pertenecer a $A_2 \cup A_3$. Supongamos que $j \in \{0, \ldots, 3\}$ de los 3 números que se colocan en la fila 1 del recuadro B pertenecen a A_2. Consideremos los siguientes casos:

- Si $n = 0$, entonces los números en las filas 1, 2, y 3 de B son A_3, A_1, y A_2 respectivamente.
- Si $n = 1$, entonces hay $\binom{3}{1}\binom{3}{2} = 9$ formas distintas de elegir cuál de los números en A_2 y cual par de números de A_3 colocar en la fila 1 de B. El otro par de números que sobra de A_2 debe ir en la fila 2 de B. De igual forma, el número que sobra de A_3 debe ir en la fila 3 de B. Sólo queda por distribuir los números en A_1 entre las filas 2 y 3 de B. Uno debe ir en la fila 3 y el otro par en la fila 2 de B. Esto se puede hacer de $\binom{3}{1} = 3$ maneras distintas. En resumen, hay $3^3 = 27$ formas de particionar los números en $\{1, \ldots, 9\}$ entre las 3 filas de B de forma de que no se repitan números en las filas del tablero.
- Si $n = 2$, entonces el caso es similar al anterior pero intercambiando el rol de las filas 2 y 3. Sigue que hay $3^3 = 27$ maneras de particionar $\{1, \ldots, 9\}$ entre las 3 filas de B de forma de que no se repitan números en las filas del tablero.
- Si $n = 3$, entonces los números en la fila 1, 2, y 3 de B son A_2, A_3, y A_1 respectivamente.

Sigue que hay $1 + 27 + 27 + 1 = 56$ formas distintas de particionar los números en $\{1, \ldots, 9\}$ en 3 conjuntos B_1, B_2 y B_3, cada uno de tamaño 3, y de manera tal que los números en B_i puedan colocarse en la fila i de B para $i = 1, \ldots, 3$. Finalmente, observar que hay 3! formas distintas de ordenar cada uno de los conjuntos B_1, B_2, y B_3, i.e. $(3!)^3 = 6^3 = 216$ formas de llenar el recuadro B respetando las restricciones impuestas por el recuadro A.

Por (i) hay 9! formas de rellenar el recuadro A, por (ii) sabemos que hay $56 \cdot 216$ formas de rellenar el recuadro B, y por (iii) tenemos que hay 216 formas de completar C. Por el principio generalizado del conteo se concluye que hay $9! \cdot 56 \cdot (216)^2$ formas de llenar el tablero de 3×9 en la versión descrita de Sudoku simplificado.

Problema 2:

(i).- Como $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega$ sigue que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Por otro lado, si $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección disjunta de eventos,

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{\omega \in \cup_{i \in I} A_i} p_\omega = \sum_{i \in I} \sum_{\omega \in A_i} p_\omega = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \ ,$$

donde la primera y última igualdad se tiene por definición de $\mathbb{P}(\cdot)$, y la segunda se deriva del hecho que los A_i's son disjuntos.

(ii).- Sea $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{-1\}) = \mathbb{P}(\{+1\}) = 1/2$ y $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$. Consideremos $A = \{-1, 0\}$ y $B = \{0, +1\}$. Como A y B no son disjuntos, no son partición de Ω. Por otro lado, es fácil ver que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2 > 0$, $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\{0\}) = 0$ y que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Por lo tanto, $\{A, B\}$ es $\mathbb{P}$–partición.

(iii).- Observar que $0 \leq \mathbb{P}\left(A\overline{B}\right) \leq \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 1 - \mathbb{P}(B) = 0$, i.e., $\mathbb{P}\left(A\overline{B}\right) = 0$. Luego,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A\overline{B} \cup AB\right) = \mathbb{P}\left(A\overline{B}\right) + \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(AB) \ .$$

(iv).- Como $\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = 1$, de la parte (iii) sigue que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \cup_{i \in I} A_i) \ .$$

Luego, por distributividad de la intersección con respecto a la unión, σ–aditividad, y definición de probabilidades condicionales,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{i \in I} AA_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(AA_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|A_i)\, \mathbb{P}(A_i) \ .$$

Problema 3:

(i).- Consideremos el experimento corrrespondiente a elegir una persona al azar en la población y que esta lance un dado. Supongamos además que de acuerdo al procedimiento descrito en el enunciado la persona selecciona la pregunta A o B y la responde honestamente. Sea F el evento “la persona está de acuerdo con el aborto” y S el evento “la personas responde SI.” Del enunciado tenemos que $\mathbb{P}(F) = p$. Se nos pide determinar $\mathbb{P}(F|S)$. Por el Teorema de Bayes,

$$\mathbb{P}(F|S) = \frac{\mathbb{P}(S|F)\, \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(S|F)\, \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}\left(S|\overline{F}\right) \mathbb{P}\left(\overline{F}\right)} \ .$$

Por otro lado, dado F ocurre S si y sólo si sale 5 o 6 en el lanzamiento del dado, i.e., $\mathbb{P}\left(S|F\right) = 1/3$. Analogamente, $\mathbb{P}\left(S|\overline{F}\right) = 2/3$. Luego,

$$\mathbb{P}\left(F|S\right) = \frac{p/3}{p/3 + 2(1-p)/3} = \frac{p}{2-p}\,.$$

(ii).- Observar que

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{n-t+1}{t} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}\,.$$

Luego, $P_t/P_{t-1} \geq 1$ si $t \leq n\alpha + \alpha$. Analogamente, $P_{t+1}/P_t \leq 1$ si $t \geq n\alpha - (1-\alpha)$. Luego, P_t es unimodal como función de t — primero crece y luego decrece. En particular,

$$P_{k-1} \leq P_k \leq P_{k+1} \iff n\alpha - (1-\alpha) \leq k \leq n\alpha + \alpha\,.$$

Pero como $0 < \alpha < 1$ y $n\alpha$ es entero, sigue que P_k se maximiza en $k = n\alpha$.

(iii).- Utilizando la misma notación que en (i), tenemos que la proporción de la población que debería responder SI es

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(S\right) = \mathbb{P}\left(S|F\right)\mathbb{P}\left(F\right) + \mathbb{P}\left(S|\overline{F}\right)\mathbb{P}\left(\overline{F}\right) = \frac{p/3}{p/3 + 2(1-p)/3} = \frac{2-p}{3}\,.$$

El estimador máximo verosímil de p es el valor que máximiza la probabilidad de obtener k respuestas SI en una muestra de tamaño n de una población en que una proporción α debería contestar que SI. De la parte (ii), el estimador máximo verosímil de p es $\widehat{p}$ tal que $k/n = (2-\widehat{p})/3$, i.e., $\widehat{p} = 2-3(k/n)$.[1]

Los supuestos implicitos en el argumento de más arriba son: (1) que la población es muy grande, (2) que el muestreo es perfecto (las personas a encuestar se eligen con equiprobabilidad), (3) que el dado usado es perfecto, y (4) que las personas responden honestamente y de acuerdo a las instrucciones que se les dan.

[1]En rigor, $\widehat{p} = 0$ si $k < 1/3$, $\widehat{p} = 2 - 3(k/n)$ si $1/3 \leq k \leq 2/3$, y $\widehat{p} = 1$ si $2/3 < k$.