Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos	**15 de Julio, 2006**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

TIEMPO: 3.25 HRS

PROBLEMA 1: Un minero extraviado puede tomar tres posibles túneles. Uno de ellos mide 2 Kms y lleva a la salida. Los otros dos traen de regreso al punto de partida y miden 3 y 5 Kms. Asuma que cada vez que el minero retorna a su posición original, elije uniformemente al azar continuar por cualquiera de los 3 túneles.

Sea Y el largo del primer túnel que sigue el minero. Además, sean X y N la distancia recorrida y el número de túneles respectivamente, que le toma al minero encontrar la salida.

(i).- (2.0 pts) Determine $\mathbb{E}(Y)$ e identifique la distribución de N.

(ii).- (2.0 pts) Muestre que existe un X' que se distribuye como X y es independiente de Y tal que

$$X = Y + X' \cdot \mathbb{I}_{\{3,5\}}(Y)\,,$$

y deduzca el valor de $\mathbb{E}(X)$.

(iii).- (2.0 pts) Para efectos de argumentación asuma que el minero se pierde una infinidad de veces. Sea Y_k el largo del k-ésimo túnel recorrido por el minero. Sean X_n y N_n la distancia recorrida y el número túneles respectivamente, que le toma al minero alcanzar la salida desde la n-ésima vez que se perdió. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{N_1 + \ldots + N_n} = \frac{\mathbb{E}(X_1)}{\mathbb{E}(N_1)}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{N_1 + \ldots + N_n} = \mathbb{E}(Y_1)\right) = 1\,.$$

Concluya que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)\,\mathbb{E}(N)$.

Indicación: Observe que $X_n = \displaystyle\sum_{k=N_1+\ldots+N_{n-1}+1}^{N_1+\ldots+N_n} Y_k$.

PROBLEMA 2:

(i).- Un mazo de n naipes se baraja de manera perfecta, i.e. tal que los $n!$ posibles ordenamientos son equiprobables. Secuencialmente usted hace n adivinanzas $A_1, \ldots, A_n \in \{1, \ldots, n\}$, siendo A_i una adivinanza de qué naipe está en la posición i. Sea N el número de adivinanzas correctas.

(i.1).- (1.5 pts) Si no se le da ninguna información acerca del resultado de sus adivinanzas previas, pruebe que para cualquier estrategia $A_1, \ldots, A_n$ se tiene que $\mathbb{E}(N) = 1$.

(i.2).- (1.5 pts) Suponga que pata todo i, después de hacer la adivinanza A_i se le muestra el i-ésimo naipe. Proponga una estrategia tal que

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\,.$$

(ii).- Para barajar un mazo de n naipes numeradas de 1 a n se toma el naipe superior del mazo y se inserta en una posición cualquiera de forma que es igualmente probable que termine bajo k cartas, $k = 0, \ldots, n-1$. Se continua el procedimiento hasta que el naipe que originalmente estaba al fondo del mazo quede en la parte superior. Entonces el procedimiento se repite una vez más y se para.

> (ii.1).- (1.2 pts) Suponga que en algún instante hay k cartas S debajo de la que originalmente estaba al fondo del mazo. Argumente que los $k!$ ordenamientos de S son equiprobables. Concluya que el mazo está perfectamente barajado cuando el procedimiento descrito para.
>
> (ii.2).- (1.8 pts) Sea N el número de pasos del procedimiento descrito. Determine $\mathbb{E}(N)$. Exprese su respuesta como una sumatoria.

PROBLEMA 3: Sean $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)$ independientes. Se define

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad \text{y} \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2\,.$$

Se puede demostrar (no lo haga) que $\overline{X}_n$ y S_n^2 son independientes.

(i).- (1.2 pts) Pruebe que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 + n\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2$.

(ii).- (1.2 pts) Use (i) para concluir que $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} S_n^2 = \sigma^2\right) = 1$.

(iii).- (1.2 pts) Muestre que existen $W \sim \chi_n^2$ y $Z \sim \mathrm{Normal}(0,1)$ tales que $W = \dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} + Z^2$ (exprese W y Z en función de $X_1, \ldots, X_n$ y $\overline{X}_n$)

(iv).- (1.2 pts) Sabiendo que la función generadora de momentos de una χ_n^2 es $t \to (1-2t)^{-n/2}$ si $t < 1/2$, use (i) para concluir que $\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

(v).- (1.2 pts) Se dice que $[a, b]$ es un intervalo de confianza de nivel $100\alpha\,\%$ para σ^2 si

$$\mathbb{P}\left(a > \sigma^2\right) = \mathbb{P}\left(\sigma^2 > b\right) = \frac{1}{2}(1-\alpha)\,.$$

Asumiendo que para $i \in \{1, \ldots, n\}$ el valor observado de X_i es x_i y que $n = 10$, use la tabla de la Figura 1 para encontrar un intervalo de confianza $[a, b]$ de nivel $95\,\%$ para σ^2 (exprese a y b en función de $x_1, \ldots, x_n$).

		β							
		0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990
	9	2,088	2,700	3,325	4,168	14,68	16,92	19,02	21,67
n	10	2,558	3,247	3,940	4,865	15,99	18,31	20,48	23,21
	11	3,053	3,816	4,575	5,578	17,28	19,68	21,92	24,72

Figura 1: Tabla de valores de t tal que $F(t) = \beta$ donde $F(\cdot)$ es la función distribución de una χ_n^2.