Ma34a Prob. y Proc. Estocásticos	3 de Julio, 2006

Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: A. Contreras, R. Cortez*

Tiempo: 3.0 hrs

Problema 1: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ como en la Figura 1 y sea (X, Y) un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre A, i.e. tal que

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{Area(A)} \cdot \mathbb{I}_A(x,y).$$

(i).- (2.0 pts) Determine $\mathbb{V}ar\,(X)$.

(ii).- (2.0 pts) Calcule $\mathbb{C}ov\,(X, Y)$.

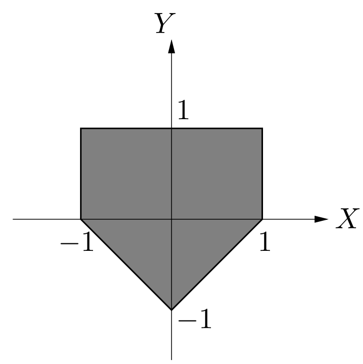

Figura 1: Conjunto A.

(iii).- (2.0 pts) ¿Son independientes X e Y? Justifique su respuesta.

Problema 2: Una subsecuencia maximal consecutiva de 1's se llama *corrida de* 1*'s*. Por ejemplo, 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 tiene 3 corridas de largos 1, 3 y 3 comenzando en las posiciones 1, 3 y 8.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes de tipo Bernoulli(p), y sea I_i igual a 1 si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tiene una corrida de 1's que comienza en i, y 0 en caso contrario. Sigue que el número de corridas de 1's en la secuencia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ está dada por $C = I_1 + \ldots + I_n$.

(i).- (2.0 pts) Calcule $\mathbb{E}\,(I_i)$ y determine $\mathbb{E}\,(C)$.

(ii).- (2.0 pts) Para $p = \frac{1}{2}$, calcule $\mathbb{V}ar\,(I_i)$, $\mathbb{C}ov\,(I_i, I_j)$ para $i \neq j$, y pruebe que $\mathbb{V}ar\,(C) = \frac{1}{16}(n+1)$.

(iii).- (2.0 pts) Determine el número de corridas c en la siguente secuencia

1010101011 1010111110 1001001000 0100010011 1010100100
→ 0100101111 0101101011 0011001010 0100011011 0010011101

Encuentre una cota superior no trivial para $\mathbb{P}(C \geq c)$. La secuencia dada fue generada por una persona. De acuerdo a su cota ¿tendría la secuencia características de una cadena de 0's y 1's generados independientemente de acuerdo a una Bernoulli(1/2)? Comente.

PROBLEMA 3:

(i).- (2.5 pts) Sean $X_1, \ldots, X_k$ variables aleatorias independientes distribuidas de acuerdo a una Geomtrica(p). Pruebe por inducción en k, que $X_1 + \ldots + X_k \sim \text{Pascal}(k,p)$. Justifique informalmente (en palabras) el porqué de este resultado.

(ii).- (3.5 pts) Se dice que $Z \sim \chi^2_n$, $n \in \mathbb{N}$, si su función densidad es

$$f_Z(t) \quad = \quad \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \cdot t^{n/2-1}\, e^{-t/2} \cdot \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)\,.$$

Sean $X \sim \chi^2_n$ e $Y \sim \chi^2_m$ independientes. Pruebe que $F = \frac{X/n}{Y/m}$ tiene función densidad de Fisher, i.e.

$$f_F(t) \quad = \quad \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} \cdot \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{\left(\frac{n}{m}t+1\right)^{\frac{n+m}{2}}} \cdot \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)\,.$$

<u>Indicación</u>: Use el método del Jacobiano.