MA-34A Prob. y Proc. Estocásticos	**26 de Noviembre, 2004**

Pauta Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: R. Cortez, M. Soto*

TIEMPO:

PROBLEMA 1:

(i).- El concursante bien puede rechazar todas las ofertas y quedarse con la última maleta. Su ganancia esperada será entonces

$$\frac{1}{|J_m|} \cdot \sum_{j \in J_m} C_j \,.$$

Notar que $|J_m| = n - m$. Luego, si la oferta C es menor que la ganancia esperada, i.e.,

$$C < \frac{1}{n-m} \cdot \sum_{j \in J_m} C_j \,.$$

No es razonable retirarse, salvo por la aversión al riesgo que pueda tener el concursante.

(ii).- Sea E_j el evento correspondiente a que el premio mayor esta en la j–ésima maleta inspeccionada. Observar que $\mathbb{P}(E_j) = 1/n$ puesto que el premio mayor es igualmente probable de encontrarse en cualquier maleta. Sea E el evento correspondiente a ganar el premio mayor. Por la regla de las probabilidades totales,

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E/E_j)\,\mathbb{P}(E_j) \,.$$

Si $j \leq l$ claramente el concursante no obtendrá el premio mayor, i.e., $\mathbb{P}(E/E_j) = 0$ si $j \leq l$. Resumiendo tenemos que

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n} \sum_{j=l+1}^{n} \mathbb{P}(E/E_j) \,.$$

Por otro lado, dado E_j el evento E ocurre sí y sólo si el mayor monto contenido por algunas de las $j-1$ primeras maletas inspeccionadas está en alguna de las l primeras maletas descartadas, i.e., ocurre con probabilidad $l/(j-1)$. Luego,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n} \sum_{j=l+1}^{n} \frac{l}{j-1} = \frac{l}{n} \sum_{j=l}^{n-1} \frac{1}{j} \,.$$

El espacio de probabilidad que hemos ocupado esta dado por $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde Ω es el conjunto de permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$. En efecto, decimos que $\omega = (i_1, \ldots, i_n)$ ocurre si el monto C_{i_j} se encuentra en la j–ésima maleta inspeccionada. Como Ω es finito, la elección adecuada de para $\mathcal{F}$ es 2^{Ω}. Finalmente, $\mathbb{P}(\cdot)$ se elije de forma de hacer el espacio equiprobable, i.e., $\mathbb{P}(\omega) = 1/n!$ para todo $\omega \in \Omega$.

(iii).- Sea $\epsilon \in]0..1[$ cualquiera fijo.

Consideraremos primero le caso en que $l \geq n^{1-\epsilon}$. Como $n \gg 1$, entonces $l \geq \epsilon n$ implica que $l \gg 1$ (porque ϵ está fijo). Luego,

$$P_{l,n} = \frac{l}{n}\sum_{j=l}^{n}\frac{1}{j} = \frac{l}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{j}\right) \sim \frac{l}{n}(\ln n - \ln l) = \frac{l}{n}\ln\left(\frac{n}{l}\right).$$

Estudiemos entonces el máximo de la función $f(x) = (\ln x)/x$, $x > 0$. Como,

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}, \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1-2\ln(x)}{x^3},$$

sigue que f tiene un único punto crítico en $x = e$ y cómo $f''(e) = -1/e^3 < 0$ dicho punto es un máximo. Se concluye que $P_{l,n}$ se maximiza cuando $n/l \approx e$, i.e., $l \approx n/e$.[1] Observar que para este última valor de l, se tiene que $P_{l,n} = 1/e$.

Si $l < n^{1-\epsilon}$, entonces si $n \gg 1$,

$$P_{l,n} = \frac{l}{n}\sum_{j=l}^{n-1}\frac{1}{j} \leq \frac{1}{n^\epsilon}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \sim \frac{\ln n}{n^\epsilon} \ll \frac{1}{e}.$$

En resumen, $P_{l,n}$ se maximiza cuando $l \approx n/e$.

Problema 2:

(i).- Como $\mathbb{C}ov\,(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}ov\,\left(\overline{X}, X_i - \overline{X}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}ov\,\left(X_j, X_i - \overline{X}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}ov\,(X_j, X_i) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}ov\,\left(X_j, \overline{X}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{C}ov\,(X_j, X_i) - \frac{1}{n^2}\sum_{j,l=1}^{n}\mathbb{C}ov\,(X_j, X_l)\,.
\end{aligned}$$

Pero, por independencia, $\mathbb{C}ov\,(X_s, X_t) = 0$ si $s \neq t$. Por otro lado, $\mathbb{C}ov\,(X_s, X_s) = \mathbb{V}ar\,(X_s) = \sigma^2$. Luego,

$$\mathbb{C}ov\,\left(\overline{X}, X_i - \overline{X}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{V}ar\,(X_i) - \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{V}ar\,(X_j) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n\sigma^2}{n} = 0\,.$$

(ii).- Claramente,

$$0 = \overline{X} - \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right).$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right) = 0\,.$$

[1] No se tiene exactamente la igualdad porque l debe tomar un valor entero.

Restando $X_n - \overline{X}$ a ambos lados de la igualdad, se concluye el resultado deseado.

(iii).- Se tiene que

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\overline{X})^2 + (X_n-\overline{X})^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\overline{X})^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-\overline{X})\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}V_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1}V_i\right)^2\right). \end{aligned}$$

Luego, S^2 es una función de V.

(iv).- Por definición de vector normal multivariado, bastará con mostrar que existe A matriz real de $n \times n$ invertible y $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{Y} = A\vec{X} + b$ donde $\vec{Y} = (\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_{n-1} - \overline{X})$. En efecto,

$$\begin{array}{lclllll} Y_1 &=& \frac{1}{n}X_1 & \frac{1}{n}X_2 & \ldots & \frac{1}{n}X_n \\ Y_2 &=& \frac{n-1}{n}X_1 & -\frac{1}{n}X_2 & \ldots & -\frac{1}{n}X_n \\ Y_3 &=& -\frac{1}{n}X_1 & \frac{n-1}{n}X_2 & \ldots & -\frac{1}{n}X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Y_n &=& -\frac{1}{n}X_1 & -\frac{1}{n}X_2 & \ldots & \frac{n-1}{n}X_n. \end{array}$$

El anterior sistema lineal se puede poner fácilmente en la forma $\vec{Y} = A\vec{X}$ donde

$$A = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ n-1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sumando la primera fila de A a cada una de las filas restantes se obtiene una matriz claramente invertible. Luego, se tiene también que A es invertible.

(v).- Sabemos que $\mathbb{V}ar\left(\overline{X}\right) = \sigma^2/n$. Sea $\vec{Y} = (\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_{n-1} - \overline{X})$. De la parte (iv) sabemos que $\vec{Y}$ es un vector normal multivariado. Luego, tiene función densidad

$$f(\vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{Det}\Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{y}-\vec{\mu})^t\, \Sigma^{-1}\,(\vec{y}-\vec{\mu})\right),$$

donde $\vec{\mu}$ es el vector de medias y Σ es la matriz de covarianza de $\vec{Y}$. Es fácil verificar que $\vec{\mu} = (\mu, 0, \ldots, 0)^t$. Además, de la parte (i) se tiene que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2/n & \vec{0}^t \\ \vec{0} & B \end{pmatrix},$$

donde $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$ es el vector que tiene todas sus coordenadas nulas. Sabemos que Σ es una matriz invertible. De hecho, tiene inversa,

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} n/\sigma^2 & \vec{0}^t \\ \vec{0} & B^{-1} \end{pmatrix},$$

Sigue que la función densidad de distribución de $\vec{Y}$ es

$$
\begin{aligned}
f(x,\vec{v}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\mu, \vec{v}^t\right)\Sigma^{-1}\left(\begin{array}{c} x-\mu \\ \vec{v} \end{array}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{v}^t B^{-1}\vec{v}\right) \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{n-1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma \mathrm{Det}(\Sigma)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\vec{v}^t B^{-1}\vec{v}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Los términos entre corchetes de la última expresión deben integrar a 1, por lo que son funciones densidad. De hecho son las funciones densidad de $\overline{X}$ y V respectivamente. Sigue que $\overline{S}$ y V son independientes.

PROBLEMA 3:

(i).- Esta parte se puede resolver ocupando el método del Jacobiano, pero hay una forma más directa de hacerlo. En efecto, notar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$
\mathbb{P}\left(\frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \le t\right) = \mathbb{P}\left(Z \le t\sqrt{U/\nu}\right) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{t\sqrt{u/\nu}} f_{Z,U}(z,u)\,dz\,du
$$

Derivando con respecto a t y observando que la independencia de Z y U implica que $f_{Z,U}(z,u) = f_Z(z)f_U(u)$ se tiene que la función densidad de $Z/\sqrt{U/r}$ es

$$
f(t) = \int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{u}{\nu}} \cdot f_{Z,U}\left(t\sqrt{u/\nu}, u\right)du = \int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{u}{\nu}} \cdot f_Z\left(t\sqrt{u/\nu}\right) f_U(u)\,du\,.
$$

Realizando el cambio de variable $x = t^2u/\nu$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu/2)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{(\nu+1)/2}\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{u}{2\nu}t^2\right) \cdot \sqrt{\frac{u}{\nu}} \cdot u^{\nu/2-1}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu/2)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{(\nu+1)/2}\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{u}{2}\cdot\left(1+t^2/\nu\right)\right) \cdot \sqrt{\frac{u}{\nu}} \cdot u^{\nu/2-1}du
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable $y = u(1 = t^2/\nu)$, se llega a

$$
f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\cdot\Gamma(\nu/2)} \cdot \left[\frac{1}{(1+t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}}\right]\int_0^{\infty}\frac{y^{(\nu+1)/2-1}}{\Gamma((\nu+1)/2)2^{(\nu+1)/2}}dy\,.
$$

La última integral es igual a 1 puesto que corresponde a la integral de la función densidad de una $\chi^2_{\nu+1}$. Luego, sigue la conclusión deseada.

(ii).- Observar que

$$
\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{S/\sigma}\,.
$$

Pero $Z = (\overline{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim \mathrm{Normal}(0,1)$ y $S/\sigma \sim \sqrt{\chi^2_{n-1}/(n-1)}$. Además de la parte (v) del Problema 2, se tiene que $\overline{X}$ y S son independientes. Luego, como funciones de variables aleatorias independientes son independientes, sigue que Z y S/σ son independientes. La conclusión deseada sigue entonces de la parte (i) de este mismo problema.

(iii).- Sea $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ y consideremos t tal que

$$0.95 = \mathbb{P}\left(-t \leq T \leq t\right) = F_T(t) - F_T(-t) = 2F_T(t) - 1\,.$$

donde la penúltima igualdad es por definición de función distribución y la última se tiene porque la función densidad de una t–student es simétrica en torno a 0. Luego, t debe ser tal que $1 - F_T(t) = 0.025$. Como T se distribuye como una t-student de 9 grados de libertad, de la tabla del enunciado se concluye que $t = 2.262$. Por otro lado,

$$-2.262 \leq T \leq 2.262 \Longleftrightarrow -2.262 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq 2.262 \Longleftrightarrow \overline{X} - 2.262 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 2.262 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\,.$$

En resumen, $\overline{X} \pm 2.262 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ es un intervalo 95% nivel de confianza para μ cuando σ es desconocido.