MA-34A Prob. y Proc. Estocásticos	25 de Octubre, 2004

Pauta Control No. 3

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: R. Cortez, M. Soto*

TIEMPO:

`-0.5 por c/error aritm. en P1`

PROBLEMA 1:

(i).- Primero determinaremos la función distribución F de $\min\{X_1, X_2\}$. Derivando obtendremos una de sus funciones densidad f e identificaremos el comportamiento de la variable aleatoria. En efecto, `0.8 plantear cálc. de` F

$$F(t) = \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2\} \leq t) = 1 - \mathbb{P}(X_1, X_2 \geq t) = 1 - (1 - F_{X_1}(t))(1 - F_{X_2}(t)),$$

`0.5 por cálc.`

donde la última igualdad se tiene por independencia de X_1 y X_2 y la definición de función distribución. Sigue que

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = f_{X_1}(t)(1 - F_{X_2}(t)) + (1 - F_{X_1}(t)) f_{X_2}(t).$$

`0.7 deriv.`

Dado que $X_1, X_2 \sim$ Exponencial(λ), entonces $f_{X_1}(t) = f_{X_2}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t)$ y $F_{X_1}(t) = F_{X_2}(t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t)$. Se concluye que `0.7 por` f`'s y` F`'s.`

$$f(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t),$$

`0.3 por result.`

i.e., $\min\{X_1, X_2\} \sim$ Exponencial(2λ).

(ii).- De la parte anterior conocemos una función densidad de $\min\{X_1, X_2\}$ y del enunciado tenemos la densidad de X_3. Por resultado conocido, $\min\{X_1, X_2\}$ y X_3 son independientes. Luego, una función densidad de X se obtiene de la convolución de las funciones densidad de $\min\{X_1, X_2\}$ y X_3, i.e., `0.5 por usar y/o mencionar indep.`

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x) \cdot \lambda e^{-\lambda(t-x)}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t-x)dx \\ &= 2\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= 2\lambda e^{-\lambda t}\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^t \\ &= 2\lambda\left(e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(t). \end{aligned}$$

`1.0 fórmula de convul.`
`1.0 límites integ.`
`0.5 por result.`

`-0.5 por c/error aritm. en P2`

PROBLEMA 2:

(i).- Primero determinaremos la función distribución conjunta $F_{U,V}$. Derivando parcialmente obtendremos la función densidad conjunta $f_{U,V}$. En efecto, `0.5 plantear cácl. de` F`.`

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) \\ &= \mathbb{P}(U \leq u) - \mathbb{P}(U \leq u, V > v) \\ &= \mathbb{P}(Z_1, Z_2 \leq u) - \mathbb{P}(v < Z_1 \leq u, v < Z_2 \leq u). \end{aligned}$$

`0.5 desarrollo.`

Como las Z_i toman valores nonegativos, la última expresión se anula si $u < 0$. Además, notar que si $v \geq u$ la expresión también se anula. Concluimos entonces que $F_{U,V}(u,v) = 0$ en caso que no se tenga que $0 < v < u$, y por lo tanto $f_{U,V}(u,v) = 0$ en la misma región. Luego, sólo consideramos en lo que sigue el caso en que $0 < v < u$. De la última ecuación y por definición de U y V se tiene que

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u,v) &= \mathbb{P}(Z_1 \leq u)\,\mathbb{P}(Z_2 \leq u) - \mathbb{P}(v < Z_1 \leq u)\,\mathbb{P}(v < Z_2 \leq u) \\ &= F_{Z_1}(u)F_{Z_2}(u) - (F_{Z_1}(u) - F_{Z_1}(v))\,(F_{Z_2}(u) - F_{Z_2}(v)) \\ &= F_{Z_1}(u)F_{Z_2}(v) + F_{Z_1}(v)F_{Z_2}(u) - F_{Z_1}(v)F_{Z_2}(v)\,, \end{aligned}$$

`0.5 uso de indep.`

`0.5 uso def. de func. distrib.`

donde la primera igualdad se tiene por independencia de Z_1 y Z_2 y la segunda igualdad por definición de función distribución. Sigue que si $0 < v < u$,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{U,V}(u,v) \\ &= f_{Z_1}(u)f_{Z_2}(v) + f_{Z_1}(v)f_{Z_2}(u) \\ &= 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}\,. \end{aligned}$$

`0.5 deriv. y desarrollo`

(ii).- Primero calculamos la densidades marginales de U y V. En efecto,

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)dv = 2\lambda^2 e^{-\lambda u} \int_0^u e^{-\lambda v} dv = 2\lambda e^{-\lambda u}\left(1 - e^{-\lambda u}\right)\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(u)\,.$$

`0.5 def. y cálc.`

Por otro lado,

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{U,V}(u,v)du = 2\lambda^2 e^{-\lambda v} \int_v^{+\infty} e^{-\lambda u} du = 2\lambda e^{-2\lambda v}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(v)\,.$$

`0.5 def. y cálc.`

Como $f_{U,V} \neq f_U f_V$ se tiene que U y V no son independientes. `0.5 conclusión.`

(iii).- Sea $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < v\}$ y $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$. Sea además $g : D \to R$ tal que $\vec{g}(u,v) = (u - v, v)$. `0.5 dar $\vec{g}$.`

Para todo $(x,y) \in R$, el sistema $x = g_1(u,v)$ e $y = g_2(u,v)$ tiene solución única $u = h_1(x,y) = x + y$ y $v = h_2(u,v) = y$. `0.5 resolver sistema.`

Además,

$$J(u,v) = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Por el método del Jacobiano se tiene entonces que si $X = U - V$ e $Y = V$, entonces

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{U,V}(u,v)\,|J(u,v)| = \begin{cases} 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+2y)}\,, & \text{si } x, y > 0, \\ 0\,, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

`0.5 encontrar densidad.`

Luego,

$$f_{U-V}(x) = f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = 2\lambda^2 e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x) \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda y} dy = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty)}(x)\,.$$

`0.5 calc. marginal.`

Se concluye que $U - V \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.

-0.5 por c/error aritm. en P3

PROBLEMA 3:

(i).- Si las variables aleatorias X y Y son conjuntamente continuas, entonces

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int\int_{x,y\in\mathbb{R}:x<y} f_{X,Y}(x,y)dxdy\,.$$

1.0 uso/mención fórmula.

Luego, como $S = \max\{T_1, T_2\} - \min\{T_1, T_2\}$ y T_3 son variables aleatorias independientes y distribuidas como exponenciales de parámetro λ,

0.5 por mención indep.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S < T_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{s}^{+\infty} f_S(s)f_{T_3}(t)dtds \\ &= \int_{0}^{+\infty}\int_{s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s}\cdot\lambda e^{-\lambda t}dtds \\ &= \lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-2\lambda s}ds \\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

1.0

0.5 por result.

(ii).- La probabilidad calculada en (i) representa la probabilidad que P_3 quede solo en la caseta. 1.5

La variable aleatoria T representa el tiempo total que P_3 permanece en la caseta. 1.5