MA-34A Prob. y Proc. Estocásticos	**20 de Septiembre, 2004**

Pauta Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: R. Cortez, M. Soto*

-0.3 por c/error aritm. en P1

PROBLEMA 1:

(i.1).- Sea B_i el evento correspondiente a "la i–ésima bola extraída es blanca" y sea U_X el evento correspondiente a "se escoge la urna X para extraer las bolas." 0.5 por def. eventos

La probabilidad que la urna escogida sea la A será, por el Teorema de Bayes, 0.5 por mencionar Bayes

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(U_A|B_1B_2\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(B_1B_2|U_A\right)\mathbb{P}\left(U_A\right)}{\mathbb{P}\left(B_1B_2|U_A\right)\mathbb{P}\left(U_A\right)+\mathbb{P}\left(B_1B_2|U_B\right)\mathbb{P}\left(U_B\right)} \\ &= \frac{\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{17}\,.\end{aligned}$$

0.5 por calculos

(i.2).- Sean B_i y U_X eventos como los de la parte anterior. La probabilidad que la tercera bola extraída sea blanca dado que las dos anteriores eran blancas será $\mathbb{P}\left(B_3|B_1B_2\right)$. 0.5 por formalizar

Por definición de probabilidades condicionales,

$$\mathbb{P}\left(B_3|B_1B_2\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B_1B_2B_3\right)}{\mathbb{P}\left(B_1B_2\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(B_1B_2B_3|U_A\right)\mathbb{P}\left(U_A\right)+\mathbb{P}\left(B_1B_2B_3|U_B\right)\mathbb{P}\left(U_B\right)}{\mathbb{P}\left(B_1B_2|U_A\right)\mathbb{P}\left(U_A\right)+\mathbb{P}\left(B_1B_2|U_B\right)\mathbb{P}\left(U_B\right)}\,,$$ 0.5

donde la última igualdad se tiene aplicando la regla de las probabilidades totales al término en el numerador y en el denominador. Luego,

$$\mathbb{P}\left(B_3|B_1B_2\right) = \frac{\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{15}{17}\,.$$ 0.5 por calculos

(ii.1).- Sea E_i el evento correspondiente a "i bits se transmiten erróneamente". Observar que

$$\mathbb{P}\left(b'\neq b\right) = \mathbb{P}\left(E_0 \dot\cup E_1 \dot\cup E_2\right)\,.$$ 0.5

Notar también que $\mathbb{P}\left(E_i\right) = \binom{n}{i}p^iq^{n-i}$.[1] Luego, 0.5

$$\mathbb{P}\left(b'\neq b\right) = \sum_{i=0}^{2}\mathbb{P}\left(E_i\right) = q^5 + \binom{5}{1}q^4p + \binom{5}{2}q^3p^2 = q^3(q^2+5pq+10p^2)\,.$$ 0.5 por calculos

Evaluando en $p = 1/3$ y $q = 1-p = 2/3$ se obtiene la conclusión deseada.

(ii.2).- Si $p > 1/2$ entonces cada vez que se recibe $c \in \{0,1\}$ lo más probable (de hecho, con 0.8

[1] Para comprobar esto se puede argumentar de varias formas. Por ejemplo, observando que la probabilidad de que los bits cuyos índices están en $S \subseteq \{1,\ldots,5\}$ se transmitan equivocadamente es $p^{|S|}q^{n-|S|}$ y que hay $\binom{n}{i}$ opciones en que S tiene cardinalidad i. Otra forma consiste en notar que el número de bits transmitidos equivocadamente sigue una Binomial(n,p).

probabilidad p) es que se haya enviado $b = 1 - c$.

Lo más conveniente entonces es decodificar de acuerdo al siguiente criterio: 0.7

$$b' = \begin{cases} 1\,, & \text{si } |\{i : c_i = 1\}| < |\{i : c_i = 0\}|\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases}$$

PROBLEMA 2:

(i).- Claramente $X + Y$ toma valores en $\mathbb{N}$. Debemos determinar $\mathbb{P}(X + Y = a)$ para $a \in \mathbb{N}$. 0.4 por formalizar

Por la regla de las probabilidades totales, particionando en la familia de eventos $\{X = i\}$ con $i \in S_X$, sigue que 0.4 por aplic. RPT

$$\mathbb{P}(X + Y = a) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X + Y = a, X = i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i, Y = a - i)\ .$$

Por independencia de X e Y sigue que 0.4 por usar indep.

$$\mathbb{P}(X + Y = a) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = a - i)\ .$$

Luego, como $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ e $Y \sim \text{Binomial}(m, p)$, 0.4 por calculos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = a) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{a-i} p^{a-i} q^{m-a+i} \\ &= p^a q^{n+m-a} \sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} \\ &= p^a q^{n+m-a} \binom{m+n}{a}\,, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por la indicación. Se concluye que $X + Y \sim \text{Binomial}(n + m, p)$.

La justificación "en palabras" del resultado recién establecido es que como X e Y corresponden al número de caras que se obtiene al lanzar n y m veces respectivamente una misma moneda con probabilidad p de caer cara, entonces bajo supuestos de independencia $X + Y$ representa el número de caras que se obtiene al lanzar la misma moneda $n + m$ veces. Luego, sigue una distribución $\text{Binomial}(n + m, p)$. 0.4

(ii.1).- La forma más natural de construir un espacio de probabilidad adecuado es ver la caminata de A como una sucesión de n experimentos independientes $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, n$. 0.4

Cada uno de los experimentos corresponderá a avanzar una cuadra en la dirección de las fondas hacia la casa de A o en la dirección contraria. Luego el experimento $\mathcal{E}_i$ es análogo al experimento que consiste en lanzar una moneda con probabilidad p de caer cara. 0.4

El espacio de probabilidad adecuado para asociar a $\mathcal{E}_i$ será $(\Omega_i, \mathcal{F}, \mathbb{P}_i)$ tal que $\Omega_i = \{-1, +1\}$, $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ y donde $\mathbb{P}(\{+1\}) = p$ y $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1 - p$. 0.4

Por todo lo anterior, un espacio de probabilidad adecuado para estudiar la caminata de A es el espacio 0.3

de probabilidad asociado al experimento $\times_{i=1}^{n}\mathcal{E}_i$, es decir, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ tal que $\Omega = \times_{i=1}^{n}\Omega_i = \{-1,+1\}^n$, $\mathcal{F} = \oplus_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i$, y $\mathbb{P} = \times_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i$.

La variable aleatoria de interés es $X:\Omega\to\mathbb{R}$ correspondiente a la distancia que recorre A desde las fondas en dirección a su casa, i.e., `0.4`

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\,.$$

(ii.2).- Supongamos que A avanza R cuadras en la dirección desde las fondas hacia su casa y L pasos en dirección contraria. Para que A caiga desmayado frente a su casa debe darse que $R-L=d$.[2] Por otro lado, sabemos que $R+L=n$. Luego, se deberá cumplir que $R=(n+d)/2$ y $L=(n-d)/2$. En particular observar como R es necesariament un entero, se debe tener que $n+d$ es necesarimente par (equivalentemente $n-d$ es par). `0.7`

Además, R claramente sigue una Binomial(n,p). Luego, la probabilidad que $R=(n+d)/2$ es `0.8 por identif. distrib.`

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+d)}p^{\frac{1}{2}(n+d)}q^{\frac{1}{2}(n-d)}\,,$$

si $n+d$ es par y 0 si no.

(ii.3).- En el caso de la primera pregunta, basta pensar que A partió desde las fondas, avanzó $n+m$ pasos y se desmayó. Luego, de la parte anterior, la probabilidad pedida es `0.5`

$$\binom{n+m}{\frac{1}{2}(n+m+d)}p^{\frac{1}{2}(n+m+d)}q^{\frac{1}{2}(n+m-d)}\,,$$

si $n+m+d$ es par y 0 en caso contrario.

En el caso de la segunda pregunta, basta pensar que A se levantó enfrente de su casa, avanzó m pasos y se desmayó. Luego, nuevamente de la parte anterior, se tiene que la probabilidad pedida es `0.5`

$$\binom{m}{\frac{1}{2}m}p^{\frac{1}{2}m}q^{\frac{1}{2}m}\,,$$

si m es par y 0 en caso contrario.

[2]Notar que la variable aleatoria X de la parte (i) corresponde exactamente a $R-L$.