MA-34A Prob. y Proc. Estocásticos	26 de Noviembre, 2004

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: R. Cortez, M. Soto*

TIEMPO: 3.0 HRS.

Elija 2 de los 3 siguientes problemas

PROBLEMA 1: Sean $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{N}$ todos distintos. Suponga que se tienen n maletas, la i–ésima con C_i pesos en su interior.

Un determinado concurso procede en etapas. Cada etapa salvo la última consiste en elegir una maleta al azar, abrirla, mostrarle el contenido al concursante, y ofrecerle a este último una cierta cantidad (que puede variar en cada etapa) para que se retire. Si el concursante llega a la última etapa, se queda con el contenido de la maleta restante.

(i).- (2.0 pts) Suponga que el concursante conoce de antemano los valores de los C_i. Sea J_m el conjunto de los índices de las maletas que quedan por inspeccionar una vez abiertas m maletas.

Suponga que una vez descartadas m maletas, y antes de abrir la $(m+1)$-ésima se le ofrecen C pesos al concursante para que se retire. Justifique que no es razonable hacerlo si

$$C < \frac{1}{n-m} \cdot \sum_{j \in J_m} C_j \, .$$

(ii).- Considere el caso en que los valores C_i no son conocidos de antemano y que la cantidad que se le ofrece al concursante en cada etapa es igual al contenido de la última maleta abierta. Suponga que el objetivo del concursante es quedarse con el premio mayor. Para ello adopta la siguiente estrategia: para un l dado descarta las l primeras ofertas independiente de su valor, y descarta las subsecuentes ofertas a menos que

- Sea la última oferta, o
- El contenido C de la última maleta inspeccionada sea tal que $C > \max\{C_j \mid j \notin J_l\}$.

Sea $P_{l,n}$ la probabilidad que el concursante se quede con el premio mayor.

(ii.1).- (2.5 pts) Pruebe que $P_{l,n} = \dfrac{l}{n}\left(\displaystyle\sum_{j=l}^{n-1} \frac{1}{j}\right)$. Explicite el espacio de probabilidad en que trabajará.

(ii.2).- (1.5 pts) Concluya que si $n \gg 1$, entonces $P_{l,n}$ se maximiza cuando $l \approx n/e$.

<u>Indicación</u>: Si $a \in \mathbb{N}$, $a \gg 1$, entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{a} \frac{1}{j} \sim \ln(a)$.

PROBLEMA 2: Sean $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ independientes idénticamente distribuidas. Se define,

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \,, \qquad \text{y} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 \,,$$

(i).- (1.0 pts) Pruebe que $\mathbb{C}ov \left(\overline{X}, X_i - \overline{X} \right) = 0$.

(ii).- (0.5 pts) Pruebe que $X_n - \overline{X} = - \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \overline{X})$.

(iii).- (0.5 pts) Concluya que S^2 puede escribirse como función del vector aleatorio $V = (X_1 - \overline{X}, \ldots, X_{n-1} - \overline{X})$.

(iv).- (2.0 pts) Pruebe que $(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_{n-1} - \overline{X})$ es un vector normal multivariado.

(v).- (2.0 pts) Concluya que $\overline{X}$ y V son independientes, y que lo mismo se cumple para $\overline{X}$ y S^2.

PROBLEMA 3:

(i).- (3.0 pts) Se dice que una variable aleatoria tiene distribucion t-student de $(\nu + 1)$ grados de libertad si su función densidad es

$$f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu} \cdot \Gamma(\nu/2)} \cdot \frac{1}{(1 + t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}} \,.$$

Sean $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$ y $U \sim \chi^2_\nu$ variables aleatorias independientes. Verifique que $Z/\sqrt{U/\nu}$ es una t-student de ν grados de libertad.

<u>Indicación</u>: Recuerde que la función densidad de una χ^2_ν es

$$g(t) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu/2) 2^{\nu/2}} \cdot t^{\nu/2 - 1} e^{-t/2} \,.$$

(ii).- Sean $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ independientes idénticamente distribuidas y defina $\overline{X}$ y S^2 como en el Problema 2. Se puede demostrar (no lo haga) que $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.

(ii.1).- (1.0 pts) Pruebe que $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ es una t-student de $(n-1)$ grados de libertad.

<u>Indicación</u>: Use un resultado del Problema 2.

(ii.2).- (2.0 pts) Para $n = 10$, determine un intervalo de confianza de nivel 95% para μ en el caso que σ sea desconocido (use la Tabla de la Figura 1).

t	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
$1 - F(t)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005

Figura 1: Función distribución F de una t–student de 9 grados de libertad.