MA-34A Prob. y Proc. Estocásticos	**20 de Septiembre, 2004**

Control No. 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliares: R. Cortez, M. Soto*

TIEMPO: TIEMPO: 2.5 HRS

PROBLEMA 1:

(i).- La urna A contiene 4 bolas blancas y 4 negras. La urna B contiene 8 bolas blancas. Se elige entre las dos urnas con igual probabilidad y se extraen sin reposición 2 bolas blancas.

(i.1).- (1.5 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A?

(i.2).- (1.5 pts) Pruebe que la probabilidad de extraer una tercera bola blanca es 15/17.

(ii).- Un canal de comunicación ruidoso se sabe transmite incorrectamente un bit con probabilidad p (independiente de los otros bits transmitidos). Para enviar un bit $b \in \{0,1\}$ a través del canal se decide usar un código de repetición de largo de bloque $n = 5$, i.e., en vez de enviar b se envía $bbbbb$. Si al enviar $bbbbb$ le llega al receptor $c_1c_2c_3c_4c_5 \in \{0,1\}^n$, entonces este decodifica tomando "el voto de mayoría," i.e., asume que se envió

$$b' = \begin{cases} 1\,, & \text{si } |\{i : c_i = 1\}| > |\{i : c_i = 0\}|\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,. \end{cases} \tag{1}$$

(ii.1).- (2.0 pts) Para $p = 1/3$, pruebe que la probabilidad de decodificar correctamente es 64/81.

(ii.2).= (1.0 pts) Para $p > 1/2$ ¿cómo modificaría (1) para obtener una mejor alternativa de decodificación? Justifique.

PROBLEMA 2:

(i).- (2.0 pts) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X e Y variables aleatorias discretas sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ con soportes S_X y S_Y respectivamente. Se dice que X e Y son independientes si

$$\forall a \in S_X\,, \forall b \in S_Y\,, \qquad \mathbb{P}\left(X = a, Y = b\right) = \mathbb{P}\left(X = a\right) \cdot \mathbb{P}\left(Y = b\right)\,.$$

Identifique la distribución de $X + Y$ cuando $X \sim \text{Binomial}(r,p)$ e $Y \sim \text{Binomial}(s,p)$ son variables aleatorias independientes. Justifique en palabras su resultado.

Indicación: Particione en la familia de eventos $\{X = i\}$ y use que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \binom{n}{i}\binom{m}{a-i} = \binom{n+m}{a}$.

(ii).- Pasadas las celebraciones dieciocheras, un compatriota A deja las fondas en grave estado de intemperancia, camina una cuadra hacia su casa con probabilidad p, y una cuadra en dirección opuesta con probabilidad $1-p$. Se sabe que la casa de A está a d cuadras de las fondas y que este alcanza a caminar exactamente n cuadras antes de caer desmayado. Nos interesará analizar con que probabilidad A cae desmayado enfrente de su casa.

(ii.1).- (1.5 pts) Construya un espacio de probabilidad adecuado para abordar el punto de interés y especifique la variable aleatoria relevante.

(ii.2).- (1.5 pts) Pruebe que la probabilidad que A caiga enfrente de su casa es

$$\binom{n}{\frac{1}{2}(n+d)} p^{\frac{1}{2}(n+d)} q^{\frac{1}{2}(n-d)},$$

si $n+d$ es par y 0 en caso contrario.

(ii.3).- (1.0 pts) Pasado un rato, A se levanta todavía en estado de ebriedad, camina m pasos más y vuelve a caer desmayado ¿Cuál es la probabilidad que A caiga enfrente de su casa? ¿Cuál es la probabilidad que A caiga enfrente de su casa si cuando se levanto estaba enfrente de su casa?

SIN CONSULTAS.