Ma31a Elementos de Álgebra **08 de Septiembre, 2007**

Pauta Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: R. Cortez*

Problema 1:

(i).- Sea f isomorfismo de $G_1 \times G_2$ en G. Sean H y K las imágenes de $G_1 \times \{1_{G_2}\}$ y $\{1_{G_1}\} \times G_2$ a través de f. Como f es biyección,

$$H \cap K = f(G_1 \times \{1_{G_2}\} \cap \{1_{G_1}\} \times G_2) = f(\{(1_{G_1}, 1_{G_2})\}) \,.$$

Dado que f es un monomorfismo, se concluye que $H \cap G = f(\{(1_{G_1}, 1_{G_2})\}) = \{1_G\}$.

Como $f(g_1, g_2) = f((g_1, 1_{G_2}) \cdot (1_{G_1}, g_2)) = f(g_1, 1_{G_1}) \cdot f(1_{G_2}, g_2) \in HK$, entonces $G = f(G_1, G_2) \subseteq HK$. Sigue inmediatamente que $HK = G$.

Es fácil ver que $G_1 \times \{1_{G_2}\}$ y $\{1_{G_1}\} \times G_2$ son subgrupos normales en G. Luego, por Teorema de la Correspondencia, y dado que f es isomorfismo (por lo tanto su núcleo es $1_G = (1_{G_1}, 1_{G_2})$) sigue que H y K son normales en G. Sean entonces $h \in H$ y $k \in K$. Como $H \triangleleft G$ se tiene que existe $h' \in H$ tal que $hk = kh'$. Análogamente, como $K \triangleleft G$ se tiene que existe $k' \in K$ tal que $hk = k'h$. Sigue que $h(h')^{-1} = (k')^{-1}k$, y por lo tanto $h(h')^{-1}, (k')^{-1}k \in H \cap K = \{1_G\}$. Concluimos que $h = h'$, $k = k'$ y que $hk = kh$.

(ii).- Sea $g \in N(P)$ de orden p^k. Observar que $P \triangleleft N(P)$ luego $N(P)/P$ es grupo. Como $[g]^{p^k} = [g^{p^k}] = [1_G]$ se tiene que $[g]$ es un elemento de $N(P)/P$ cuyo orden divide a p^k, digamos p^i. Sea $K = \langle [g] \rangle \in N(P)/P$. Tenemos que K es un p-subgrupo de $N(P)/P$. Por Teorema de la Correspondencia, existe $\widetilde{K} = \nu^{-1}(K) \subseteq N(P)$ subgrupo que contiene a P, donde ν es la proyección canónica de $N(P)$ en $N(P)/P$.

Afirmamos que $\widetilde{K}$ es un p-grupo. En efecto, sea $\widetilde{k} \in \widetilde{K}$, sigue que $[\widetilde{k}] \in K$. Como K es de tamaño p^i, por Lagrange sigue que $[\widetilde{k}]$ tiene orden una potencia de p, digamos $p^{i_{\widetilde{k}}}$. Luego, $[\widetilde{k}^{p^{i_{\widetilde{k}}}}] = [\widetilde{k}]^{p^{i_{\widetilde{k}}}} = [1] = P$ de donde se concluye que $\widetilde{k}^{p^{i_{\widetilde{k}}}} \in P$. Como P es un p-grupo se concluye sin demasiado esfuerzo que $\widetilde{k}$ tiene orden potencia de p, i.e. $\widetilde{K}$ es un p-grupo.

Como $[g] \in K$ se tiene que $g \in \widetilde{K}$, y por maximalidad de los subgrupos de Sylow se concluye que $g \in K = P$.

PROBLEMA 2: Sea G un grupo de orden 18. Como $18 = 2 \cdot 3^2$ sigue que G posee un 3-subgrupo de Sylow de orden 9 que denotaremos P_9, y un 2-subgrupo de Sylow de orden 2 que denotaremos P_2.

El número de conjugados de P_9 puede ser a lo más $18/9 = 2$ y congruente a 1 módulo 3. Sigue que P_9 es invariante bajo conjugación, i.e. $P_9 \triangleleft G$. Además, como P_9 tiene orden el cuadrado de un primo, debe ser abeliano. Se tienen los siguientes dos casos:

- P_9 tiene un elemento de orden 9: Entonces es isomorfo a $\mathbb{Z}_9$.
- P_9 no tiene elementos de orden 9: Entonces sus elementos distintos del neutro deben ser todos de orden 3. Sea $x \in P_9$ de orden 3 y $y \notin P_9 \setminus \langle x \rangle$. Como P_9 es abeliano, se verifica fácilmente que $\langle \{x, y\} \rangle = \{x^i y^j \ : \ 0 \leq i, j \leq 2\} = P_9$. Sigue que P_9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

En el caso que P_2 es normal en G, entonces G es isomorfo a $P_2 \times P_9$. Por resultado visto en cátedra, sigue que en este caso G es abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ o $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Si P_2 no es normal en G, entonces actúa por conjugación sobre P_9. Consideremos entonces los siguientes dos casos:

- $\Phi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_9)$ morfismo: Sea $\varphi_i = \Phi(i)$. Como Φ es morfismo, $\varphi_0 = id$ y φ_1 debe ser de orden 2. Como $Aut(\mathbb{Z}_9)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ y el único elemento de orden 2 en $\mathbb{Z}_9^*$ es $8 = -1 \text{ mód } 9$. Se debe tener entonces que $\varphi_1 : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ es tal que $\varphi_1(x) = -x$. Luego, en $\mathbb{Z}_9 \times_\Phi \mathbb{Z}_2$ se tiene la siguiente ley de composición interna:
$$\begin{aligned} (a,b)(a',b') &= (a +_9 \varphi_b(a'), b +_2 b') \\ &= (a +_9 (-1)^b a', b +_2 b')\,. \end{aligned}$$
Se verifica que el grupo que se obtiene es isomorfo a D_9.
- $\Phi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ morfismo: Se verifica que $Aut(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_3^* \times \mathbb{Z}_3^*$. Denotaremos por $\nu : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ el único isomorfismo distinto de la identidad, i.e. $\nu(x) = -x$. Notar que ν es de orden 2. Sea $\varphi_a = \Phi(a)$ con $a \in \mathbb{Z}_2$. Como Φ es morfismo, φ_1 debe ser de orden 2. Los tres casos posibles son:
  - $\varphi_1 = (\nu, id)$: En este caso, en $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \times_\Phi \mathbb{Z}_2$ se tiene la siguiente ley de composición interna:
  $$\begin{aligned} ((a,b),c)((a',b'),c') &= ((a,b) + \varphi_c(a',b'), c +_2 c') \\ &= ((a +_3 (-1)^c a', b +_3 b'), c +_2 c')\,. \end{aligned}$$
  Se verifica que el grupo que se obtiene es isomorfo a $S_3 \times \mathbb{Z}_3$.

- $\varphi_1 = (id, \nu)$: En este caso $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \times_\Phi \mathbb{Z}_2$ es isomorfo al grupo del caso previo.
- $\varphi_1 = (\nu, \nu)$: En este caso, en $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \times_\Phi \mathbb{Z}_2$ se tiene la siguiente ley de composición interna:

$$\begin{aligned}((a,b),c)((a',b'),c') &= ((a,b) + \varphi_c(a',b'), c +_2 c') \\ &= ((a +_3 (-1)^c a', b +_3 (-1)^c b'), c +_2 c')\,.\end{aligned}$$

Problema 3:

(i).- Para obtener 4 subgrupos distintos de S_4 isomorfos a S_3 basta considerar G_i como el subgrupo de permutaciones en que i es punto fijo, $i = 1, \ldots, 4$.

Veamos ahora como obtener 9 subgrupos distintos de S_4 isomorfos a S_2. Para ello, definamos $\tau_{i,j} = (ij)$ para $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$, $i < j$. Sea $G_{i,j} = \langle \tau_{i,j} \rangle$. Es fácil ver que $G_{i,j}$ es isomorfo a S_2. Hemos construido 6 subgrupos de S_4 isomorfos a S_2. Los otros 3 subgrupos se obtienen como $H' = \langle \tau_{1,2}\tau_{3,4} \rangle$, $H'' = \langle \tau_{1,3}\tau_{2,4} \rangle$, y $H''' = \langle \tau_{1,4}\tau_{2,3} \rangle$.

(ii.1).- Sean $\beta_1 = (147)$, $\beta_2 = (258)$ y $\beta_3 = (369)$. Notar que los β_i conmutan y que β es el producto de los β_i.

En lo que sigue, sea $I_\pi : S_9 \to S_9$ el operador conjugación por π. Por resultado visto, $I_\pi(i_1 i_2 \ldots i_k) = (\pi(i_1)\pi(i_2) \ldots \pi(i_k))$. Sigue que

$$I_{\beta^0}(\alpha) = (123)\,, \qquad I_{\beta^1}(\alpha) = (456)\,, \qquad \text{y} \qquad I_{\beta^2}(\alpha) = (789)\,.$$

Sea $\alpha_i = I_{\beta^i}(\alpha)$. Claramente $\alpha_i \in P$, y los α_i conmutan entre si. Afirmamos que todos los elementos de la forma $\alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k \beta^l$ donde $i, j, k, l \in \{0, 1, 2\}$, son distintos. En efecto, si $\alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k \beta^l = \alpha_1^{i'} \alpha_2^{j'} \alpha_3^{k'} \beta^{l'}$, entonces por conmutatividad de los α_i's tendríamos que

$$\alpha_1^{i-i'} \alpha_2^{j-j'} \alpha_3^{k-k'} = \beta^{l'-l}\,.$$

Es fácil verificar que lo anterior es posible sólo si $i = i'$, $j = j'$, $k = k'$ y $l = l'$, lo que concluye la demostración de la afirmación.

Como $\alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k \beta^l \in P$ y hay 3^4 posibilidades para los valores de (i, j, k, l), sigue que P tiene orden al menos 81.

(ii.2).- Observar que para $i, j, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\alpha^i &= \beta^{-1} I_\beta(\alpha^i)\beta\,, \\ \beta^l I_{\beta^j}(\alpha^i) &= I_{\beta^{j+l}}(\alpha^i)\beta^l\,.\end{aligned}$$

Luego, por la caracterización de subgrupo generado, sigue que

$$P = \langle \{\alpha, \beta\} \rangle = \left\{ I_{\beta^j}(\alpha^i)\beta^l \,:\, i, j, l \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Pero $\beta^{-3l} = 1$, luego

$$(I_{\beta^j}(\alpha^i)\beta^l)^3 = (\beta^{-l} I_{\beta^j}(\alpha^i)\beta^l)^3 = (I_{\beta^{j-l}}(\alpha^i))^3 = I_{\beta^{j-l}}(\alpha^{3i}) = I_{\beta^{j-l}}(1) = 1 \,.$$

Luego, todo elemento de P tiene orden que divide a 3, i.e. P es un 3 grupo.

(ii.3).- Como 3^4 es la mayor potencia de 3 que divide a 9 cualquier 3-grupo de S_9 tiene a lo más 3^4 elementos. Para comprobar la no-abelianidad de P basta verificar que $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.