MA-31A Elementos de Álgebra	**15 de Octubre, 2005**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

4.5 HRS.

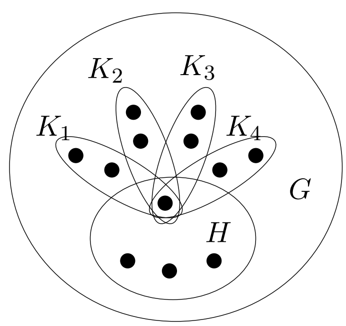
PROBLEMA 1: El objetivo de este problema es probar parte del siguiente resultado.

Teorema 1 *Salvo isomorfísmos los grupos de orden* 12 *son: (1)* $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$, *(2)* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, *(3) El grupo alternante* A_4, *(4) El grupo dihedral* D_6, *y (5) El grupo generado por* x *e* y *con las relaciones* $x^4 = 1$, $y^3 = 1$, $xy = y^2 x$.

Sea G de orden 12. Sean H y K de Sylow, 2- y 3–subgrupos de G respectivamente.

(i).- (1.0 pts) Pruebe que $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ o $H \cong \mathbb{Z}_4$, y que $K \cong \mathbb{Z}_3$.

(ii).- (2.5 pts) Suponga que $K \ntriangleleft G$ (luego, K posee 4 conjugados $K_1, \ldots, K_4$). Pruebe que se debe tener la situación que se ilustra en la figura de más abajo, y en particular que $H \triangleleft G$. Concluya que $H \triangleleft G$ o $K \triangleleft G$.



(iii).- (1.0 pts) Si $H, K \triangleleft G$, ¿a cuáles de los 5 grupos listados más arriba puede G ser isomorfo?

(iv).- (1.5 pts) Si $K \triangleleft G$ y $H \cong \mathbb{Z}_4$, pruebe que G es isomorfo al grupo generado por x e y con las relaciones $x^4 = 1$, $y^3 = 1$, $xy = y^2 x$.

<u>Nota</u>: Los otros dos clases de grupos de orden 12 corresponden a: (1) $H \triangleleft K$ y $K \ntriangleleft G$, y (2) $K \triangleleft G$, $H \ntriangleleft G$, $H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Problema 2: Sea V espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. En particular, recordar que V es un $\mathbb{F}[t]$ módulo con la ley de composición externa $p(t) \cdot v = (p(T))(v)$.

(i).- (1.2 pts) Pruebe que V es isomorfo a $\mathbb{F}[t]/(p_1^{e_1}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}[t]/(p_r^{e_r})$ como $\mathbb{F}[t]$ módulo para $p_1, \ldots, p_r$ polinomios irreducibles en $\mathbb{F}[t]$ y $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(ii).- (1.2 pts) Concluya a partir de (i) que existen $W_1, \ldots, W_r$ submódulos cíclicos de V tales que $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$.

(iii).- (1.2 pts) Sea β_i base de W_i, $i = 1, \ldots, r$. Pruebe que $\beta = \bigcup_{i=1}^{r} \beta_i$ es base de V y que $[T]_{\beta,\beta}$ es una matriz diagonal por bloques de tamaño $|\beta_i| \times |\beta_i|$, $i = 1, \ldots, r$.

(iv).- (1.2 pts) Se define $I = ((t-\alpha)^m)$. Pruebe que $\beta = \{[(t-\alpha)^i]_I : i = 0, \ldots, m-1\}$ es base de $\mathbb{F}[t]/((t-\alpha)^m)$. Para

$$\begin{array}{rccc} L & : & \mathbb{F}[t]/((t-\alpha)^m) & \to & \mathbb{F}[t]/((t-\alpha)^m) \\ & & [q]_I & & [t \cdot q]_I \end{array}$$

Pruebe que $[L]_{\beta,\beta}$ es un bloque de Jordan, i.e., es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & & & \\ 1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(v).- (1.2 pts) Pruebe que en el caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ existe una base con respecto a la cual la matriz representante de T es una matriz diagonal de bloques de Jordan.

<u>Indicación</u>: Use los resultados conocidos de irreducibilidad de polinomios en $\mathbb{C}[x]$.