MA-31A Elementos de Álgebra	**6 de Diciembre, 2003**

Examen

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: H. Castro, J. Soto*

TIEMPO: 4.0 HRS.

Sean $\mathbb{K}$ y $\mathbb{F}$ cuerpos tales que $\mathbb{K}|_{\mathbb{F}}$. En lo que sigue asumiremos que $\mathbb{K}$ y $\mathbb{F}$ son de característica 0.

Se dice que un automorfismo de $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{F}$–automorfismo si cuando se restringe a $\mathbb{F}$ es la identidad. El conjunto de $\mathbb{F}$-automorfismos de $\mathbb{K}$ se llama el grupo de Galois de $\mathbb{K}|_{\mathbb{F}}$, y lo denotaremos $\mathbf{Gal}(\mathbb{K}|_{\mathbb{F}})$.

Uno de los resultados importantes en Teoría de Galois es el siguiente

Teorema 1 *Para toda extensión finita* $\mathbb{L}|_{\mathbb{H}}$, *se tiene que* $o(\mathbf{Gal}(\mathbb{L}|_{\mathbb{H}}) = [\mathbb{L} : \mathbb{H}]$.

Una extensión finita $\mathbb{L}|_{\mathbb{H}}$ se dice extensión de Galois si $o(\mathbf{Gal}(\mathbb{L}|_{\mathbb{H}})) = [\mathbb{L} : \mathbb{H}]$.

(i).- (0.4 pts) Pruebe que $\mathbf{Gal}(\mathbb{K}|_{\mathbb{F}})$ es un grupo.

(ii).- (1.2 pts) Pruebe que si $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = 2$, entonces $\mathbb{K} = \mathbb{F}(\delta)$ donde $\delta^2 = D \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

<u>Indicación</u>: Pruebe primero que existen $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq \alpha'$, tales que $\mathbb{K} = \mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}(\alpha')$ (recuerde que $\mathbb{K}$ es de característica 0).

(iii).- (0.8 pts) Sea $\mathbb{K} = \mathbb{F}[x]/(x^2 - D)$ para algún $\delta^2 = D \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Pruebe que $\mathbf{Gal}(\mathbb{K}|_{\mathbb{F}}) = \{id, \sigma\}$ donde σ es el $\mathbb{F}$-automorfismo de $\mathbb{K}$ tal que $\sigma(\delta) = -\delta$.

(iv).- Si ahora $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = 4$, al igual que en (ii)–(iii), se puede probar (no lo haga) que $\mathbb{K} = \mathbb{F}(\alpha, \beta)$ donde $\alpha^2 = a$ y $\beta^2 = b$ para $a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ distintos, y que existen $\mathbb{F}$-automorfismos σ y τ de $\mathbb{K}$ tales que $\sigma(\alpha) = -\alpha$, $\sigma(\beta) = \beta$, $\tau(\alpha) = \alpha$, y $\tau(\beta) = -\beta$.

> (iv.1).- (0.6 pts) Pruebe que hay a lo más cuatro $\mathbb{F}$-automorfismos de $\mathbb{K}$.
>
> (iv.2).- (0.4 pts) Pruebe que el grupo de $\mathbb{F}$-automorfismos de $\mathbb{K}$ generado por $\{\sigma, \tau\}$ es igual a $\{id, \sigma, \tau, \sigma \circ \tau\}$ y concluya que $\mathbb{K}|_{\mathbb{F}}$ es una extensión de Galois.

(v).- (0.6 pts) Sea G un grupo de automorfismos de un cuerpo $\mathbb{H}$. Se define,

$$\mathbb{H}^G = \{\omega \in \mathbb{K} : \varphi(\omega) = \omega, \text{para todo } \varphi \in G\} .$$

Pruebe que $\mathbb{H}^G$ es un cuerpo.

(vi).- (1.2 pts) Pruebe que como corolario del Teorema 1 se tiene que si $\mathbb{K}|_{\mathbb{F}}$ es una extensión de Galois y $G = \mathbf{Gal}(\mathbb{K}|_{\mathbb{F}})$, entonces $\mathbb{K}^G = \mathbb{F}$.

<u>Indicación</u>: Verifique primero que si $\mathbb{L} = \mathbb{K}^G$, entonces $G = \mathbf{Gal}(\mathbb{K}|_{\mathbb{L}})$.

(vii).- (0.8 pts) Sea $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = 2$. Caracterice todos los elementos de $\mathbb{K}$ cuyos cuadrados están en $\mathbb{F}$.

<u>Indicación</u>: Use (ii), (iii), y (vi).