Ma3101 Elementos de Álgebra **18 de Octubre, 2014**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: B. Ruiz, A. Turkieltaub*

TIEMPO 4.0 HRS.

PROBLEMA 1:

Se dice que un anillo $\mathcal{R}$ es noetheriano si satisface la *condición de cadena ascendente para ideales*, i.e., que dado $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_{k-1} \subseteq I_k \subseteq \cdots$ una cadena de ideales de $\mathcal{R}$, existe k_0 tal que $I_k = I_{k_0}$ para todo $k \geq k_0$.

El objetivo de este problema es probar el siguiente:

> **Teorema de las Bases de Hilbert:** *Sea $\mathcal{R}$ un anillo conmutativo con unidad. Si $\mathcal{R}$ es noetheriano, entonces $\mathcal{R}[x]$ también es noetheriano.*

En lo que sigue sea $\mathcal{R}$ anillo conmutativo con unidad.

(i).- (1.5 pts) Pruebe que $\mathcal{R}$ es noetheriano si y sólo si todo ideal I de $\mathcal{R}$ (potencialmente degenerado) es finitamente generado.

(ii).- (1.0 pts) Considere I ideal de $\mathcal{R}[x]$. Sea L_d el conjunto de coeficientes principales (líderes) de los elementos de I de grado $d \in \mathbb{N}$ junto con $0_{\mathcal{R}}$. Pruebe que L_d es un ideal (potencialmente degenerado) de $\mathcal{R}$.

(iii).- (1.0 pts) Pruebe que el conjunto L de coeficientes principales de los elementos de I también es un ideal (potencialmente degenerado) de $\mathcal{R}$.

(iv).- (2.5 pts) Sean $c_{d,1}, c_{d,2}, \ldots, c_{d,n_d} \in \mathcal{R}$ tales que $L_d \neq \{0_{\mathcal{R}}\}$ es generado por $\{c_{d,1}, \ldots, c_{d,n_d}\}$, y sea $p_{d,i}$ un polinomio en I de grado d con coeficiente principal $c_{d,i}$. Sean $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{R}$ y $p_1, \ldots, p_n \in I$ definidos de manera análoga pero con respecto al ideal L. Por último, sea $D = \text{máx}\{\text{grado}(p_j) : 1 \leq j \leq n\}$.

Pruebe que I es generado por

$$\{p_1, \ldots, p_n\} \cup \bigcup_{0 \leq d \leq D : L_d \neq \{0_{\mathcal{R}}\}} \{p_{d,i} : 1 \leq i \leq n_d\}.$$

PROBLEMA 2: El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

> **Teorema:** *Si $\mathcal{R}$ es un dominio ideal principal, entonces un sub-módulo de un $\mathcal{R}$-módulo de rango finito b tiene rango $a \leq b$.*

Sea entonces $\mathcal{R}$ un dominio ideal principal,[1] M un $\mathcal{R}$-módulo libre de rango b, $N \neq \{0_M\}$ un sub-módulo de M, y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{R})$ el conjunto de morfismos de $\mathcal{R}$-módulos de M en $\mathcal{R}$.

(i).- (0.5 pts) Argumente que para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{R})$ existe r_φ tal que $\varphi(N) = (r_\varphi)$ y que el siguiente conjunto es no vacío:

$$\Sigma = \{(r_\varphi) : \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{R}) \text{ y } r_\varphi \in \mathcal{R} \text{ tq. } \varphi(N) = (r_\varphi)\}.$$

(ii).- (1.25 pts) Pruebe que Σ contiene al menos un elemento maximal para la inclusión, i.e., que existe $\nu \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{R})$ tal que $\nu(N) = (r_\nu)$ no está estrictamente contenido en ningún otro elemento de Σ.

(iii).- (0.5 pts) Pruebe que $r_\nu \neq 0_{\mathcal{R}}$.

<u>Indicación</u>: Considere $m_1, \ldots, m_b$ base de M y $\pi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{R})$ la proyección que le asocia a $m \in M$ a la i-ésima coordenada de m con respecto a la base $\{m_1, \ldots, m_b\}$.

(iv).- (1.25 pts) Por (ii), sabemos que existe $n_\nu \in N$ tal que $\nu(n_\nu) = r_\nu$. Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, \mathcal{R})$ sea d_φ tal que (d_φ) es igual al ideal generado por $\{r_\nu, \varphi(n_\nu)\}$. Pruebe que $(d_\varphi) = (r_\nu)$ y concluya que para todo morfismo de proyección π_i, existe $r_i \in \mathcal{R}$ tal que $\pi_i(n_\nu) = r_i r_\nu$.

(v).- (1.0 pts) Sea $n_1 = r_1 m_1 + r_2 m_2 + \ldots + r_b m_b$. Pruebe que $\nu(n_1) = 1_{\mathcal{R}}$.

(vi).- (0.75 pts) Pruebe que $M = Rn_1 \oplus \mathrm{Ker}(\nu)$ y $N = Rr_\nu n_1 \oplus (N \cap \mathrm{Ker}(\nu))$.

(vii).- (0.75 pts) Concluya el teorema enunciado al comienzo de este problema.

[1] Conmutativo con unidad.