Ma3101 Elementos de Álgebra — **18 de Junio, 2011**

Control 2

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: O. Rivera, D. Salas*

Tiempo 5.0 hrs.

Problema 1: Se dice que un anillo es noetheriano si todo ideal de R es finitamente generado. El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

Teorema 1 *[Teorema Fundamental de Hilbert] Si R es anillo noetheriano, entonces $R[x]$ tambien es noetheriano.*

(i).- (0.6 pts) Sea V un R-módulo. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a).- Todo submódulo W de V es finitamente generado.

(b).- (Condición de cadena ascendente) No existe una cadena infinita estrictamente creciente $W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \ldots$ de submódulos de V.

(ii).- (0.6 pts) Pruebe que si R es anillo noetheriano, entonces todo ideal $I \subsetneq R$ está contenido en un ideal maximal.

Indicación: Use la parte (i).

(iii).- (0.6 pts) Sea $\varphi : V \to W$ un homomorfismo de R-módulos (R no necesariamente noetheriano). Pruebe que si el núcleo e imágen de φ son módulos finitamente generados, entonces también lo es V.

Indicación: Argumente como en la demostración del Teorema Núcleo Imágen.

(iv).- (0.6 pts) Pruebe (por inducción) que si $V = R^m$, con R anillo noetheriano, entonces todo submódulo de V es finitamente generado.

Indicación: Para el paso inductivo, proyecte adecuadamente y use la parte (iii).

(v).- (0.6 pts) Pruebe que si V es un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano R, entonces todo submódulo de V es finitamente generado.

Indicación: Use la parte (iv).

(vi).- (0.6 pts) Pruebe que si R es un anillo noetheriano, e $I \subsetneq R$ es ideal, entonces $\overline{R} = R/I$ es noetheriano.

(vii).- (0.6 pts) Sea I un ideal de $R[x]$. Sea A_I el conjunto que contiene a $0 \in R$ y el conjunto de coeficientes líderes de los polinomios en I. Pruebe que A_I es un ideal (potencialmente degenerado) de R.

(viii).- Sea R noetheriano, I un ideal de $R[x]$, y sea A_I como en (vii), luego existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ generadores de A_I. Para cada $1 \leq i \leq k$, elegimos un polinomio $f_i \in I$ con coeficiente líder igual a α_i, y multiplicamos estos polinomios por x^{n_i} de manera que $x^{n_i} f_i$ sea de grado $n \geq \max\{grado(f_i) \,:\, i = 1, \ldots, n\}$. Sea $P_n = \langle 1, x, \ldots, x^{n-1} \rangle_R$.

> (viii.1).- (0.3 pts) Pruebe que $S_n = I \cap P_n$ es un R-submódulo del R-módulo P_n. Concluya usando (v) que existen $h_1, \ldots, h_s$ tales que $S_n = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle_R$.
>
> (viii.2).- (0.3 pts) Sea $J = \langle f_1, \ldots, f_k, h_1, \ldots, h_s \rangle_R$. Pruebe que $J \subseteq I$.
>
> (viii.3).- (0.6 pts) Pruebe que si $g \in I$ es de grado menor que n, entonces $g \in S_n$. Concluya que $g \in J$.
>
> (viii.4).- (0.6 pts) Sea $g \in I$ de grado $m \geq n$. Pruebe que existen $r_1, \ldots, r_k \in R$ tales que si
>
> $$p(x) \;=\; x^{m-n} \sum_{i=1}^{k} r_i x^{n_i} f_i(x)\,,$$
>
> entonces $g_1 = g - p \in I$ tiene grado menor que m. Por inducción, concluya que $g_1 \in J$ y que $g \in J$. Esto completa la demostración de que $I = J$ es finitamente generado y por lo tanto que $R[x]$ es noetheriano.