Ma3101 Elementos de Álgebra **30 de Abril, 2011**

Control 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi *Prof. Auxiliar: O. Rivera, D. Salas*

Tiempo 5.0 hrs.

Problema 1: (30 %)

Sea G un grupo finito de orden n y p el menor primo divisor de $|G|$. Sea H subgrupo de G de índice p, i.e. $[G:H]=p$. El objetivo de este problema es probar que bajo las hipótesis enunciadas, necesariamente se cumple que $H \lhd G$.

(i).- (1.5 pts) Pruebe que existen $g_1,\ldots,g_p \in G$ tales que $\{gH : g \in G\} = \{g_1H,\ldots,g_pH\}$ y que si para $g \in G$ se define $\pi_g : [p] \to [p]$ tal que $\pi_g(i)=j$ si $gg_iH = g_jH$, entonces π_g esta bien definida y $\pi_g \in S_p$.

(ii).- (2.0 pts) Pruebe que $\pi_H : G \to S_p$ tal que $\pi_H(g)=\pi_g$ es un morfismo de grupos. Sea $K = Ker(\pi_H)$. Concluya que G/K es isomorfo a un subgrupo de S_p.

(iii).- (2.5 pts) Pruebe que H es subgrupo normal de G.

<u>Indicación</u>: Observe que $|G/K| = p \cdot [H:K]$ y pruebe que $[H:K]=1$.

Problema 2: (40 %)

Sea G grupo de orden pq, con p y q primos tales que $p<q$. Sean P y Q subgrupos de Sylow de G de orden p y q respectivamente (existen por los Teoremas de Sylow).

(i).- (1.2 pts) Pruebe que $Q \lhd G$ y $G \cong Q \times_\phi P$ para algún morfismo $\phi : P \to Aut(Q)$, o equivalentemente $G \cong \mathbb{Z}_q \times_\phi \mathbb{Z}_p$ para algún morfismo $\phi : \mathbb{Z}_p \to Aut(\mathbb{Z}_q)$.

(ii).- (1.2 pts) Sea p tal que no divide a $q-1$. Pruebe que $G \cong \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$ y que G es cíclico.

(iii).- Se sabe (no lo demuestre) que $\mathbb{Z}_q^*$ es cíclico y que contiene un único subgrupo de orden p si p divide a $q-1$.

Asuma que p divide a $q-1$.

> (iii.1).- (1.2 pts) Sea $\phi : \mathbb{Z}_p \to Aut(\mathbb{Z}_q)$ morfismo no trivial (es decir, $\phi(b) \neq id_{\mathbb{Z}_q}$ para algún $b \in \mathbb{Z}_p$). Pruebe que $\mathbb{Z}_q \times_\phi \mathbb{Z}_p$ no es abeliano.

(iii.2).- (1.2 pts) Pruebe que si $\phi, \phi' : \mathbb{Z}_p \to Aut(\mathbb{Z}_q)$ son morfismos distintos, ambos no triviales, entonces $\mathbb{Z}_q \times_\phi \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_q \times_{\phi'} \mathbb{Z}_p$.

Indicación: Para establecer el isomorfismo, considere aplicaciones del tipo $(a, b) \to (a, \alpha b)$ con $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ apropiadamente elegido.

(iv).- (1.2 pts) ¿Cuántos grupos no isomorfos hay de orden 6, 10, 14, 15, 21, 22, y 26? Justifique. Identifique cuantos grupos son abelianos y no abelianos.

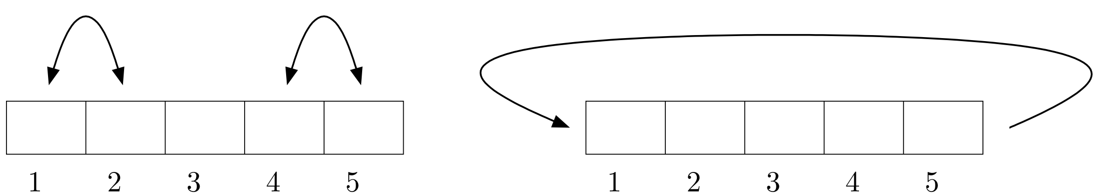
Problema 3: (30 %)

Considere el juego de permutación donde se permiten las siguientes dos operaciones:

- Operación φ: consistente en intercambiar simultáneamente los cuadrados 1 con el 2 y el 4 con el 5 (ver Figura 1(a)).
- Operación ϕ: Consistente en hacer el shift cíclico en el sentido contrario de las manillas del reloj, i.e. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$ (ver Figura 1(b)).

Sea $\pi \in S_5$ una configuración de partida tal que inicialmente el valor i se encuentra en el $\pi(i)$-ésimo cuadrado. Pruebe que si π es par, entonces partiendo de la configuración π los números se pueden colocar (usando operaciones φ y ϕ solamente) de manera que queden ordenados del 1 al 5.

Indicación: Puede serle útil mostrar que hay 20 cíclos distintos de largo 3 en S_5.



(a) Operación φ (b) Operación ϕ

Figura 1: